PŘÍKLADY K MATEMATICE 3

ZDENĚK ŠIBRAVA

1. Křivkové integrály

1.1. Křivkový integrál prvního druhu.

Příklad 1.1. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s$, *kde* C *je úsečka* AB, $A = (0,-2)$, $B = (4,0)$.

Řešení: Úsečka AB je hladká křivka. Funkce

$$\psi(t) = (4t, -2+2t), \quad t \in \langle 0,1\rangle,$$

je parametrizace křivky C. Protože

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

je potom

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\mathrm{d}s}{x-y} &= \int_0^1 \frac{1}{4t-(-2+2t)}\sqrt{4^2+2^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \sqrt{5}\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\,[\ln|t+1|]_0^1 = \sqrt{5}\ln 2.\end{aligned}$$

Příklad 1.2. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$, *kde* C *je obvod trojúhelníku* ABC, $A = (0,1)$, $B = (2,1)$, $C = (0,3)$.

Řešení: C není hladká křivka, ale vznikne spojením tří na sebe navazujících křivek C_1, C_2, C_3 (stran trojúhelníku ABC), kde

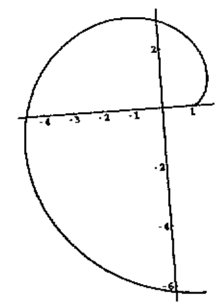
$$\begin{aligned} C_1 &: \quad x = 0+2t, \quad y = 1+0\cdot t, \quad t\in\langle 0,1\rangle,\\ C_2 &: \quad x = 2-2t, \quad y = 1+2t, \quad t\in\langle 0,1\rangle,\\ C_3 &: \quad x = 0+0\cdot t, \quad y = 1+2t, \quad t\in\langle 0,1\rangle.\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 (2t+1)2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 ((2-2t)+(1+2t))\sqrt{8}\,\mathrm{d}t + \\ &+ \int_0^1 (2t+1)2\,\mathrm{d}t = 8+3\sqrt{8}.\end{aligned}$$

V

Příklad 1.3. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C x^2\,\mathrm{d}s$, *kde* C *je graf funkce* $f(x) = \ln x$, $x \in \langle 1,2\rangle$.



Obr. 1

Řešení: Položíme-li $x = t$, potom $y = \ln t$ je $\psi(t) = (t, \ln t)$, $t \in \langle 1,2\rangle$ parametrizace křivky C. Potom

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}s = \int_1^2 t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Označíme-li $u = t^2+1$ a dále $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$ dostaneme

$$\int_1^2 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right).$$

M.

Příklad 1.4. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$, *kde* C *je křivka (Obr.1 pro* $a = 1$*) s parametrizací*

$$\psi(t) = (a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t)), \qquad t\in\langle 0,2\pi\rangle, \quad (a>0).$$

Řešení: Předně je

$$\psi'(t) = (at\cos t, at\sin t) \quad \text{a} \quad \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = \sqrt{(at)^2(\cos^2 t+\sin^2 t)} = at.$$

Potom

$$\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2\left((\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right) at\,\mathrm{d}t = \underline{2a^3\pi^2(1+2\pi^2)}.$$

Příklad 1.5. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C \left(2\sqrt{x^2+y^2}-z\right)\mathrm{d}s$, *kde* C *je křivka (jeden „závit“ kuželové šroubovice) s parametrizací*

$$\psi(t) = (t\cos t, t\sin t, t), \qquad t\in\langle 0,2\pi\rangle.$$

Řešení: Opět nejřív vypočítáme

$$\psi'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1) \quad \text{a} \quad \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)} = \sqrt{2+t^2}.$$

Jelikož je $\mathbf{g}(0) = (3,0,0)$, indukuje tato parametrizace na oblouku $\mathcal{O}$ orientaci opačnou než je zadaná orientace, takže ji sice smíme použít, avšak musíme změnit znaménko vypočtené hodnoty integrálu. My tu změnu znaménka provedeme ihned v prvním kroku tím, že před integrál, který dostaneme po dosazení hodnot parametrizace a jejich derivací, dáme znaménko mínus.

$$\int_{\mathcal{O}} (y^2 + z)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y + (x + y + yz)\,\mathrm{d}z =$$

$$= -\int_0^{2\pi} [(9\sin^2 t + t)(-3\sin t) - 9\sin t\cos t(3\cos t) + (3\cos t + 3\sin t + 3t\sin t)]\,\mathrm{d}t =$$

$$= -3\int_0^{2\pi} (\cos t - 8\sin t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

V

6. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} (x + 1)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$$

po části kružnice se středem v počátku a poloměrem r, která leží v prvním kvadrantu. Za počáteční bod oblouku volíme bod $\mathbf{a} = (0, r)$.

Řešení

Zadanou čtvrtkružnici $\mathcal{O}$ parametrizujeme pomocí polárních souřadnic

$$\mathbf{g}(t) = (r\cos t, r\sin t)\,, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle.$$

Pak

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = (-r\sin t, r\cos t)\,, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Jelikož je $\mathbf{g}(0) = (r, 0)$, indukuje tato parametrizace na oblouku $\mathcal{O}$ orientaci opačnou než je zadaná orientace. Smíme ji sice použít, avšak musíme změnit znaménko vypočtené hodnoty integrálu. Je

$$\int_{\mathcal{O}} (x + 1)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos^2 t + r\cos t - r^2\sin^2 t)\,\mathrm{d}t =$$

$(r\cos t + 1) r\cos t$
$- r\sin t \; r\sin t$

$$= -r\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos 2t + \cos t)\,\mathrm{d}t = -r.$$

7. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + (x + y - 1)\,\mathrm{d}z$$

po úsečce $\overline{\mathbf{ab}}$, kde $\mathbf{a} = (1,1,1), \mathbf{b} = (2,3,4)$.

1

V

Příklad 1.60. *Užitím Greenovy věty vypočítejme křivkový integrál*

$$\oint_C (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná elipsa $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, $(a > 0, b > 0)$.

Řešení: Připomeňme, že je-li $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ rovinné vektorové pole a C jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, jež tvoří hranici množiny M, pak podle Greenovy věty platí, že tok tohoto vektorového pole přes hranici množiny M (tj. křivku C) je roven úhrnému množství divergence tohoto pole na M. Tedy platí

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_M \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}A, \tag{12}$$

tj.

$$\oint_C -Q(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_M \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}A. \tag{13}$$

Chceme-li nyní použít k výpočtu integrálu $\oint_{(C)}(x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y$ vzorec (13), znamená to, že místo toku vektorového pole $\mathbf{F}(x,y) = (-(x-y), -(x+y))$ přes křivku C, můžeme počítat úhrné množství divergence tohoto pole na M. Protože $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y) = (-1,-1)$, je

$$\oint_{(C)} (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y = \int_M (-1-1)\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -2abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \underline{\underline{-2ab\pi}}$$

(Dvojný integrál jsme vypočítali substitucí pomocí zobecněných polárních souřadnic.)

2

Příklad 1.61. *Užitím Greenovy věty vypočítejme křivkový integrál*

$$\oint_{(C)} \left(\frac{1}{x} + 2xy - \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná hranice množiny

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \wedge \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}\,x\right\}.$$

Řešení: Protože počítaný křivkový integrál nám opět představuje levou stranu ve vzorci (13), je

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3}, -\frac{1}{x} - 2xy + \frac{y^3}{3}\right).$$

Odtud

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y) = (2x + x^2, -2x + y^2).$$