1'

Příklad 1.39. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C (2-y)\,\mathrm{d}x + (1+x)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je obvod trojúhelníku s vrcholy* $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ *a orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.*

Řešení: Křivka C není hladká. Vznikne spojením tří na sebe navazujících křivek (úseček – stran trojúhelníka) C_1, C_2 a C_3 s parametrizacemi

$$\begin{array}{llll} C_1: & \psi(t)=(t,t), & t\in\langle 0,1\rangle, & \text{kladně orientovaná,} \\ C_2: & \psi(t)=(t,2-t), & t\in\langle 0,1\rangle, & \text{záporně orientovaná,} \\ C_1: & \psi(t)=(0,t), & t\in\langle 0,2\rangle, & \text{záporně orientovaná.} \end{array}$$

Potom

$$\int_C (2-y)\,\mathrm{d}x+(1+x)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (2-t+1+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (2-2+t-1-t)\,\mathrm{d}t - \int_0^2 (1)\,\mathrm{d}t = 2.$$

V příkladech 1.40 – 1.47 vypočítejte křivkové integrály podél křivky C.

Příklad 1.40. $\int_C y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je čtvrtkružnice* $x^2+y^2=a^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ $(a>0)$ *s počátečním bodem* $(a,0)$ *a koncovým bodem* $(0,a)$. ***Výsledek:*** 0

Příklad 1.41. $\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je křivka* $y=1-|1-x|$, $x\in\langle 0,2\rangle$ *s počátečním bodem* $(0,0)$. ***Výsledek:*** 4/3

Příklad 1.42. $\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$, *kde křivka* C *je obvod obdelníku s vrcholy* $(2,2)$, $(5,2)$, $(5,4)$, $(2,4)$ *orientovaná souhlasně s uvedeným pořadím vrcholů.*
Výsledek: 42

Příklad 1.43. $\int_C \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, *kde křivka* C *je část hyperboly* $xy=1$ *s počátečním bodem* $(3,1/3)$ *a koncovým bodem* $(1/2,2)$. ***Výsledek:*** $\ln 6 - 5/3$

Příklad 1.44. $\int_C (2y-6xy^3)\,\mathrm{d}x + (2x-9x^2y^2)\,\mathrm{d}y$, *kde*
a) C *je parabola* $y=x^2$ *s počátečním bodem* $(0,0)$ *a koncovým bodem* $(1,1)$,
b) C *je úsečka s počátečním bodem* $(0,0)$ *a koncovým bodem* $(1,1)$.
Výsledek: *a)* -1, *b)* -1

Příklad 1.45. $\int_C yz\,\mathrm{d}x + z\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y + yx\,\mathrm{d}z$, *kde* C *křivka s parametrizací* $\psi(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$ $(a>0, b>0)$ *s počátečním bodem* $(a,0,0)$ *a koncovým bodem* $(a,0,2\pi b)$.
Výsledek: $-\pi^2a^2b$

Příklad 1.46. $\int_C (x+y+z)\,\mathrm{d}x$, *kde křivka* C *je obvod trojúhelníku s vrcholy* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ *orientovaná souhlasně s uvedeným pořadím vrcholů.*
Výsledek: 0

Příklad 1.47. $\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, *kde* C *je průniková křivka ploch* $z=xy$ *a* $x^2+y^2=1$ *orientovaná souhlasně s pořadím bodů* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$.
Výsledek: $-\pi$

1.2. Křivkový integrál druhého druhu.

Příklad 1.37. *Nechť* $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$ *je vektorové pole a* C *kladně orientovaná hladká křivka s parametrizací* $\psi(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. *Vypočítejme křivkový integrál druhého druhu* $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s$.

Řešení: Připomeňme si nejdříve několik skutečností, které při výpočtu integrálu použijeme.

Je-li $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ vektorové pole, C hladká orientovaná křivka s parametrizací $\psi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, b\rangle$ ($\mathbf{T}$ je její jednotkový tečný vektor), potom

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{7}$$

Užitím věty o substituci dostaneme

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s &= \int_C (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + \\ &+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{8}$$

Připomeňme ještě, že v případě rovinného vektorového pole (7) i (8) platí, s tím, že R a z jsou nulové.

Nyní se vrátíme k našemu příkladu. Protože $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, budeme podle (7) počítat integrál

$$\int_C (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y - x^2\,\mathrm{d}z,$$

a protože

$$\psi(t) = (t, t^2, t^3) \quad \text{a} \quad \psi'(t) = (1, 2t, 3t^2),$$

je podle (8)

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \left(t^4 - t^6 + 2t^2\cdot t^3\cdot 2t - t^2\cdot 3t^2\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{35}.$$

2!

Příklad 1.38. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je parabola* $y = x^2$, $x \in \langle -1, 1\rangle$ *s počátečním bodem* $(-1, 1)$ *a koncovým bodem* $(1, 1)$.

Řešení: Křivkový integrál je zadán ve tvaru (7) a $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ je rovinné vektorové pole. Označíme-li $x(t) = t$ a $y(t) = t^2$ je $\psi(t) = (t, t^2)$, $t \in \langle -1, 1\rangle$ parametrizací křivky C. Protože $(-1, 1)$ je počátečním bodem a $(1, 1)$ koncovým bodem křivky, je křivka při zvolené parametrizaci orientována kladně (je orientována ve směru rostoucího parametru). Dále $\psi'(t) = (1, 2t)$ a podle (8)

$$\int_C (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \left((t^2 - 2t^3) + (t^4 - 2t^3)\cdot 2t\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{14}{15}.$$

Poslední integrál řešíme metodou per partes (po částech)

$$\int_0^1 t \operatorname{arctg} t \, dt = \left[\frac{t^2+1}{2} \operatorname{arctg} t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

volili jsme za $f'(t) = t$ a $g(t) = \operatorname{arctg} t$, odtud nám vyšlo $g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ a můžeme vzít $f(t) = \frac{t^2+1}{2}$.

Příklad 10.10:
Vypočítejte křivkový integrál

3'

$$\int_\gamma \frac{4xy}{\sqrt{1+4x^2}}\, ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (2y - \ln x, x^2)\, d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = t^2 \\ y = \ln t \end{array} \qquad t \in \langle 1, 2 \rangle .$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{r} = \left((t^2)', (\ln t)' \right) = \left(2t, \frac{1}{t}\right).$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{r}\, dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (2y - \ln x, x^2)\, d\vec{r} = \int_1^2 (2\ln t - \ln t^2, t^4) \cdot \left(2t, \frac{1}{t}\right) dt = \int_1^2 t^3\, dt = \frac{1}{4}\left[t^4\right]_1^2 = \frac{15}{4}.$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme navíc ještě velikost tečného vektoru

$$|\vec{r}| = \sqrt{(2t)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t}\sqrt{4t^4+1}.$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{r}|\, dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \frac{4xy}{\sqrt{1+4x^2}}\, ds = \int_1^2 \frac{4t^2 \ln t}{\sqrt{1+4t^4}} \cdot \frac{1}{t}\sqrt{1+4t^4}\, dt = = 4\int_1^2 t \ln t\, dt = 2\left[t^2 \ln t\right]_1^2 - 2\int_1^2 t\, dt = 8\ln 2 - 3,$$

Předposlední integrál jsme řešili metodou per partes (po částech).

Příklad 10.11:
Vypočítejte křivkový integrál

13.

$$\int_\gamma \frac{1}{x\sqrt{1+8y^3}}\, ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (2y, x^2)\, d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{array} \qquad t \in \langle 1, 2 \rangle .$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{r} = \left(\left(\frac{1}{t}\right)', \left(\frac{1}{2}t^2\right)' \right) = \left(-\frac{1}{t^2}, t\right).$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{r}\, dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (2y, x^2)\, d\vec{r} = \int_1^2 \left(2 \cdot \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{t^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}, t\right) dt = \int_1^2 \left(-1 + \frac{1}{t}\right) dt = [\ln t - t]_1^2 = \ln 2 - 1.$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme navíc ještě velikost tečného vektoru

$$|\vec{r}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{t^2}\right)^2 + t^2} = = \sqrt{\frac{1}{t^4} + t^2} = \frac{1}{t^2}\sqrt{1+t^6}.$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{r}|\, dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \frac{1}{x\sqrt{1+8y^3}}\, ds = \int_1^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^6}} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \sqrt{1+t^6}\, dt = = \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_1^2 = \ln 2.$$

Příklad 10.12:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma 3\sqrt{x^2+y^2}\, ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = t\cos t \\ y = t \sin t \end{array} \qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle .$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{r} = \left((t\cos t)', (t \sin t)' \right) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)$$

a jeho velikost

$$|\vec{r}| = \sqrt{1+t^2}.$$

Dosazením do $ds = |\vec{r}|\, dt$ obdržíme

$$\int_\gamma 3\sqrt{x^2+y^2}\, ds = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{t^2} \cdot \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{1+t^2}\, dt$$

a dále použijeme substituci $w := 1 + t^2$, odkud plyne $du = 2t\, dt$, $0 \leadsto 1$ a $2\pi \leadsto 1 + 4\pi^2$, a tedy

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{3}{2}\int_1^{1+4\pi^2} \sqrt{w}\, dw = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\left[w\sqrt{w}\right]_1^{1+4\pi^2} = (1+4\pi^2)\sqrt{1+4\pi^2} - 1.$$

Příklad 10.13:
Vypočítejte křivkový integrál

9.

$$\int_\gamma \frac{16x}{\sqrt{y^4+64}}\, ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = t - \ln t \\ y = 2\sqrt{2t} \end{array} \qquad t \in \langle 1, 3 \rangle .$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{r} = \left((t - \ln t)', (2\sqrt{2t})' \right) = \left(1 - \frac{1}{t}, \sqrt{\frac{2}{t}}\right)$$

a jeho velikost

$$|\vec{r}| = \sqrt{(1-\frac{1}{t})^2 + \frac{2}{t}} = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}.$$

Zbývá dosadit do vztahu $ds = |\vec{r}|\, dt$ a dopočítat

$$\int_\gamma \frac{16x}{\sqrt{y^4+64}}\, ds = \int_1^3 \frac{t - \ln t}{\sqrt{64t^2+64}} \cdot \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\, dt = 2\int_1^3 (1 - \frac{\ln t}{t})\, dt = \left[2t - \ln^2 t\right]_1^3 = 4 - \ln^2 3.$$

Příklad 10.14:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\, ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (x, y)\, d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = \sqrt{t}\cos t \\ y = \sqrt{t} \sin t \end{array} \qquad t \in \langle 0, \pi \rangle .$$

Příklady

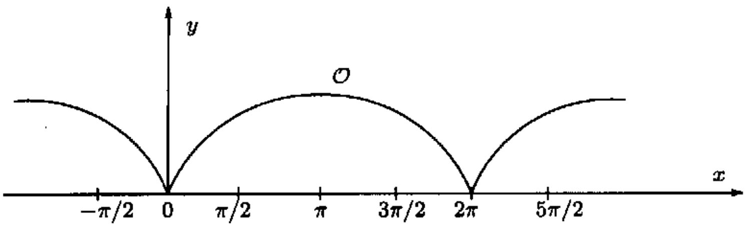
6'

1. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} (2-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

po jednom oblouku $\mathcal{O}$ cykloidy (viz obr. 3.5) zadaném parametrizací

$$\mathbf{g}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$



Obrázek 3.5: Cykloida z 1. příkladu

Řešení

Pro danou parametrizaci $\mathbf{g}(t)$ je $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1-\cos t, \sin t),\ t \in (0, 2\pi)$, a tedy

$$\int_{\mathcal{O}} (2-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} [(2-1+\cos t)(1-\cos t) + (t-\sin t)(\sin t)]\,\mathrm{d}t = -2\pi.$$

2. Máme najít hodnotu integrálu

4'

$$\int_{\mathcal{O}} \cancel{(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y},$$

kde $\mathcal{O}$ je úsečka s počátečním bodem $\mathbf{a} = (2,3)$ a koncovým bodem $\mathbf{b} = (3,5)$.

Řešení

Za parametrizaci úsečky $\mathcal{O} = \overline{\mathbf{ab}}$ volíme vektorovou funkci

$$\mathbf{g}(t) = (t, 2t-1),\ t \in \langle 2, 3\rangle.$$

Pak $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1,2)$, a tedy

$$\int_{\mathcal{O}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_2^3 [(t-2t+1) + (t+2t-1)2]\,\mathrm{d}t = \frac{23}{2}.$$

3. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

užili jsme substituce $w := \sin t$.

Příklad 10.5:
Vypočítejte křivkový integrál

10.

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^2+y^2}\,ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (x,y)\,d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{array} \quad t \in \langle 0,\pi\rangle\,.$$

5!

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((t\cos t)',\, (t\sin t)' \right) = \left(\cos t - t\sin t\,,\ \sin t + t\cos t \right)\,.$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\,dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (x,y)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (t\cos t\,,\ t\sin t)\cdot(\cos t - t\sin t\,,\ \sin t + t\cos t)\,dt = \int_0^\pi t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2\,.$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme navíc ještě velikost tečného vektoru

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2} =$$
$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t} = \sqrt{1+t^2}\,.$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{\tau}|\,dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^2+y^2}\,ds = \int_0^\pi \sqrt{1+t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\cdot\sqrt{1+t^2}\,dt =$$
$$= \int_0^\pi (1+t^2)\,dt = \left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^\pi = \frac{\pi}{3}\,(3+\pi^2)\,.$$

Příklad 10.6:
Vypočítejte křivkový integrál

7.

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}\,ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\cos 2t \\ y = \sin t \end{array} \quad t \in \langle 0,\tfrac{\pi}{2}\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor a jeho velikost

$$\vec{\tau} = \left((\tfrac{1}{2}\cos 2t)',\, (\sin t)' \right) = \left(-\sin 2t\,,\ \cos t \right)\,, \qquad |\vec{\tau}| = \sqrt{(-\sin 2t)^2 + \cos^2 t} = \sqrt{4\sin^2 t + 1}\cdot\cos t\,.$$

Zbývá dosadit do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\,dt$ a dopočítat

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\sin^2 t+1}}\sqrt{4\sin^2 t+1}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\,.$$

Příklad 10.7:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma (y^3, x^2)\,d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ y = t \end{array} \quad t \in \langle 1,2\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left(\left(\frac{1}{t}\right)',\, (t)' \right) = \left(-\frac{1}{t^2}\,,\ 1 \right)\,.$$

Odtud dosadíme do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\,dt$ a počítáme

$$\int_\gamma (y^3,x^2)\,d\vec{r} = \int_1^2 \left(t^3, \frac{1}{t^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}, 1\right)\,dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - t\right)\,dt = \left[-\frac{1}{t} - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = -1\,.$$

Příklad 10.8:
Vypočítejte křivkový integrál

8.

$$\int_\gamma \sqrt{x+y+\frac{1}{2}}\,ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = t+\sqrt{t} \\ y = t-\sqrt{t} \end{array} \quad t \in \langle 1,4\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((t+\sqrt{t})',\, (t-\sqrt{t})' \right) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}\,,\ 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right)$$

a jeho velikost

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{4t}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\,.$$

Dosadíme do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\,dt$ a dopočítáme

$$\int_\gamma \sqrt{x+y+\frac{1}{2}}\,ds = \int_1^4 \sqrt{2t+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\,dt = \int_1^4 \frac{4t+1}{2\sqrt{t}}\,dt =$$
$$= 2\int_1^4 \sqrt{t}\,dt + \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{4}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_1^4 + \left[\sqrt{t}\right]_1^4 = \frac{31}{3}\,.$$

Příklad 10.9:
Vypočítejte křivkový integrál

9

$$\int_\gamma (y^2, -xy)\,d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = t + \operatorname{arctg} t \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{array} \quad t \in \langle 0,1\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((t+\operatorname{arctg} t)',\, \left(\sqrt{1+t^2}\right)' \right) = \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\,,\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) = \left(\frac{2+t^2}{1+t^2}\,,\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)\,.$$

Odtud dosadíme do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\,dt$ a počítáme

$$\int_\gamma (y^2,-xy)\,d\vec{r} = \int_0^1 \left(1+t^2, -(t+\operatorname{arctg} t)\sqrt{1+t^2}\right)\cdot\left(\frac{2+t^2}{1+t^2}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\,dt =$$
$$= \int_0^1 \left(2+t^2 - t\cdot(t+\operatorname{arctg} t)\right)\,dt = \int_0^1 (2 - t\operatorname{arctg} t)\,dt = \underbrace{\int_0^1 2\,dt}_{=2} - \underbrace{\int_0^1 t\operatorname{arctg} t}_{=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(10-\pi)\,.$$

Příklady

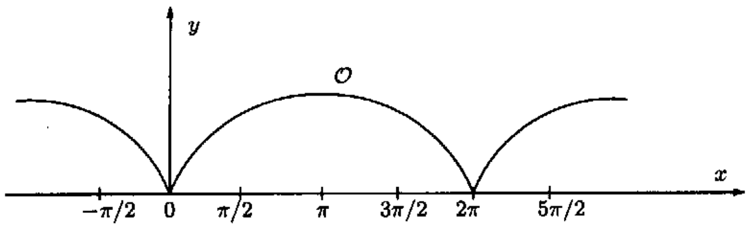
6!

1. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} (2-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

po jednom oblouku $\mathcal{O}$ cykloidy (viz obr. 3.5) zadaném parametrizací

$$\mathbf{g}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



æ

Obrázek 3.5: Cykloida z 1. příkladu

Řešení
Pro danou parametrizaci $\mathbf{g}(t)$ je $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1 - \cos t, \sin t),\ t \in (0, 2\pi)$, a tedy

$$\int_{\mathcal{O}} (2-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} [(2 - 1 + \cos t)(1 - \cos t) + (t - \sin t)(\sin t)]\,\mathrm{d}t = -2\pi.$$

4!

2. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} \cancel{(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y},$$

kde $\mathcal{O}$ je úsečka s počátečním bodem $\mathbf{a} = (2, 3)$ a koncovým bodem $\mathbf{b} = (3, 5)$.
Řešení
Za parametrizaci úsečky $\mathcal{O} = \overline{\mathbf{ab}}$ volíme vektorovou funkci

$$\mathbf{g}(t) = (t, 2t - 1),\ t \in \langle 2, 3 \rangle.$$

Pak $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1, 2)$, a tedy

$$\int_{\mathcal{O}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_2^3 [(t - 2t + 1) + (t + 2t - 1)2]\,\mathrm{d}t = \frac{23}{2}.$$

3. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

10. Křivkový integrál

V následujících příkladech máme zadanou křivku parametricky pomocí rovnic

$$\gamma: \quad \begin{array}{l} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{array} \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle .$$

Při počítání křivkových integrálů pro nás bude mít klíčový význam tečný vektor $\vec{\tau} = (\varphi_1', \varphi_2')$ a vztahy

$$ds = |\vec{\tau}|\, dt\,, \qquad \text{a} \qquad d\vec{r} = \vec{\tau}\, dt\,.$$

Příklad 10.1:
Vypočítejte křivkový integrál

7!

$$\int_\gamma \frac{1}{xy}\, ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (x, y)\, d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = \sqrt{1+t} \\ y = \sqrt{1-t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, \tfrac{1}{2} \rangle .$$

řešení:
Nejprve vypočítáme ten správný tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((\sqrt{1+t})', (\sqrt{1-t})' \right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}, -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right).$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\, dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (x, y)\, d\vec{r} = \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1+t}, \sqrt{1-t}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}, -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\, dt = 0\,.$$

Pro výpočet prvního integrálu však potřebujeme navíc ještě velikost onoho tečného vektoru

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{4(1-t)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{\tau}|\, dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \frac{1}{xy}\, ds = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t} \cdot \sqrt{1-t}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln|1+t| - \ln|1-t| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{2} \right) = \frac{\ln 3}{2\sqrt{2}}\,.$$

Příklad 10.2:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma xy\, ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (y, -x)\, d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = \sqrt{1+t} \\ y = \sqrt{1-t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle .$$

řešení:
Z předešlého příkladu připomeneme tečný vektor $\vec{\tau}$ a jeho velikost

$$\vec{\tau} = \left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}, -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right), \qquad |\vec{\tau}| = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Dosazením do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\, dt$ dostaneme

$$\int_\gamma xy\, ds = \int_0^1 \sqrt{1+t} \cdot \sqrt{1-t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Výpočet druhého integrálu je trošku technicky náročnější, je však opět založen na vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\, dt$. Po dosazení máme

$$\int_\gamma (y, -x)\, d\vec{r} = \int_0^1 (\sqrt{1-t}, -\sqrt{1+t}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}, -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} - \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{(1+t)(1-t)}}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1-t} \cdot \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt\,.$$

Dále použijeme substituci

$$w := \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,, \quad \text{odkud plyne} \quad t = \frac{1-w^2}{1+w^2}\,, \quad dt = \frac{-4w\, dw}{(1+w^2)^2}\,, \quad \frac{1}{1-t} = \frac{1+w^2}{2w^2} \quad \text{a} \quad 0 \rightsquigarrow 1\,,\ 1 \rightsquigarrow 0\,,$$

a pokračujeme

$$\int_0^1 \frac{1}{1-t} \cdot \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = \int_1^0 \frac{1+w^2}{2w^2} \cdot w \cdot \frac{-4w}{(1+w^2)^2}\, dw = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+w^2}\, dw = 2 \left[\operatorname{arctg} w \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Příklad 10.3:
Vypočítejte křivkový integrál

4.

$$\int_\gamma \sqrt{1+y}\, ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = t + \cos t \\ y = \sin t \end{array} \qquad t \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2} \rangle .$$

řešení:
Nejprve opět vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((t + \cos t)', (\sin t)' \right) = (1 - \sin t, \cos t)$$

a jeho velikost

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(1 - \sin t)^2 + \cos^2 t} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sin t}\,.$$

Dosadíme do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\, dt$ a dostaneme

$$\int_\gamma \sqrt{1+y}\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin t} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \sin t}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \sqrt{2} [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\,.$$

Příklad 10.4:
Vypočítejte křivkový integrál

5.

$$\int_\gamma 3xy^2\, ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \qquad t \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2} \rangle .$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor a jeho velikost

$$\vec{\tau} = \left((\cos t)', (\sin t)' \right) = (-\sin t, \cos t)\,, \qquad |\vec{\tau}| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1\,.$$

Zbývá opět jen dosadit do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\, dt$ a dopočítat

$$\int_\gamma 3xy^2\, ds = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\, dt = 3 \int_0^1 w^2\, dw = \left[w^3 \right]_0^1 = 1\,,$$

po oblouku $\mathcal{O}$, kterým je část grafu funkce $f(x) = x^2$ pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$. Oblouk je orientován tak, že počátečním bodem je bod $\mathbf{a} = (0, 0)$.

Řešení

Oblouk $\mathcal{O}$ budeme parametrizovat jako graf funkce

$$\mathbf{g}(t) = (t, t^2), \ t \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Odtud plyne $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1, 2t)$, a tedy

$$\int_{\mathcal{O}} (x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 [t - t^2 + (t + t^2)2t]\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (t + t^2 + 2t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{38}{3}.$$

4. Máme najít hodnotu integrálu

8.

$$\int_{\mathcal{O}} (x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y$$

po oblouku $\mathcal{O}$, kterým je část grafu funkce $f(y) = y^2$ pro $y \in \langle 0, 2 \rangle$. Oblouk je orientován tak, že počátečním bodem je bod $\mathbf{a} = (0, 0)$.

Řešení

Oblouk $\mathcal{O}$ budeme parametrizovat podobně jako v předešlém příkladě jako graf funkce, avšak nyní je nezávisle proměnná y a závisle proměnná x. Volíme tedy parametrizaci

$$\mathbf{g}(t) = (t^2, t), \ t \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Odtud plyne $\dot{\mathbf{g}}(t) = (2t, 1)$. Jelikož je $\mathbf{g}(0) = (0, 0)$, indukuje tato parametrizace na oblouku $\mathcal{O}$ orientaci souhlasnou se zadanou orientací, takže ji smíme použít, aniž musíme upravovat vypočtenou hodnotu integrálu. Po dosazení dostáváme

$$\int_{\mathcal{O}} (x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 [(t^2 - t)2t + t^2 + t]\,\mathrm{d}t = \frac{22}{3}.$$

5. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} (y^2 + z)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y + (x + y + yz)\,\mathrm{d}z$$

po jednom závitu šroubovice s poloměrem 3 a stoupáním 2π, orientovaným tak, že počátečním bodem je bod $\mathbf{a} = (3, 0, 2\pi)$ a koncovým bodem je bod $\mathbf{b} = (3, 0, 0)$.

Řešení

Za parametrizaci oblouku $\mathcal{O}$ volíme vektorovou funkci válcových souřadnic

$$\mathbf{g}(t) = (3\cos t, 3\sin t, t), \ t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Odtud plyne

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 1), \ t \in (0, 2\pi).$$

užili jsme substituce $w := \sin t$.

Příklad 10.5:
Vypočítejte křivkový integrál

10.

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^2+y^2}\,ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (x,y)\,d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{matrix} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{matrix} \qquad t\in\langle 0,\pi\rangle\,.$$

5!

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{r} = \left((t\cos t)',\, (t\sin t)' \right) = (\cos t - t\sin t\,,\, \sin t + t\cos t)\,.$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{r}\,dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (x,y)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (t\cos t\,,\, t\sin t)\cdot(\cos t - t\sin t\,,\, \sin t + t\cos t)\,dt = \int_0^\pi t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2\,.$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme navíc ještě velikost tečného vektoru

$$|\vec{r}| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2} =$$
$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t} = \sqrt{1+t^2}\,.$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{r}|\,dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^2+y^2}\,ds = \int_0^\pi \sqrt{1+t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\cdot\sqrt{1+t^2}\,dt =$$
$$= \int_0^\pi (1+t^2)\,dt = \left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^\pi = \frac{\pi}{3}\left(3+\pi^2\right)\,.$$

Příklad 10.6:
Vypočítejte křivkový integrál

7.

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}\,ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{matrix} x = \frac{1}{2}\cos 2t \\ y = \sin t \end{matrix} \qquad t\in\langle 0,\tfrac{\pi}{2}\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor a jeho velikost

$$\vec{r} = \left((\tfrac{1}{2}\cos 2t)',\, (\sin t)' \right) = (-\sin 2t\,,\, \cos t)\,, \qquad |\vec{r}| = \sqrt{(-\sin 2t)^2 + \cos^2 t} = \sqrt{4\sin^2 t + 1}\cdot\cos t\,.$$

Zbývá dosadit do vztahu $ds = |\vec{r}|\,dt$ a dopočítat

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\sin^2 t+1}}\sqrt{4\sin^2 t+1}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\,.$$

Příklad 10.7:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma (y^3, x^2)\,d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{matrix} x = \frac{1}{t} \\ y = t \end{matrix} \qquad t\in\langle 1,2\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{r} = \left(\left(\frac{1}{t}\right)',\, (t)' \right) = \left(-\frac{1}{t^2}\,,\, 1\right)\,.$$

Odtud dosadíme do vztahu $d\vec{r} = \vec{r}\,dt$ a počítáme

$$\int_\gamma (y^3,x^2)\,d\vec{r} = \int_1^2 \left(t^3, \frac{1}{t^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}, 1\right)dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - t\right)dt = \left[-\frac{1}{t} - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = -1\,.$$

Příklad 10.8:
Vypočítejte křivkový integrál

8.

$$\int_\gamma \sqrt{x+y+\frac{1}{2}}\,ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{matrix} x = t+\sqrt{t} \\ y = t-\sqrt{t} \end{matrix} \qquad t\in\langle 1,4\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{r} = \left((t+\sqrt{t})',\, (t-\sqrt{t})' \right) = \left(1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\,,\, 1-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

a jeho velikost

$$|\vec{r}| = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{4t}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\,.$$

Dosadíme do vztahu $ds = |\vec{r}|\,dt$ a dopočítáme

$$\int_\gamma \sqrt{x+y+\frac{1}{2}}\,ds = \int_1^4 \sqrt{2t+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\,dt = \int_1^4 \frac{4t+1}{2\sqrt{t}}\,dt =$$
$$= 2\int_1^4 \sqrt{t}\,dt + \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{4}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_1^4 + \left[\sqrt{t}\right]_1^4 = \frac{31}{3}\,.$$

Příklad 10.9:
Vypočítejte křivkový integrál

9

$$\int_\gamma (y^2, -xy)\,d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{matrix} x = t+\operatorname{arctg} t \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{matrix} \qquad t\in\langle 0,1\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{r} = \left((t+\operatorname{arctg} t)',\, \left(\sqrt{1+t^2}\right)' \right) = \left(1+\frac{1}{1+t^2}\,,\, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \left(\frac{2+t^2}{1+t^2}\,,\, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\,.$$

Odtud dosadíme do vztahu $d\vec{r} = \vec{r}\,dt$ a počítáme

$$\int_\gamma (y^2,-xy)\,d\vec{r} = \int_0^1 \left(1+t^2, -(t+\operatorname{arctg} t)\sqrt{1+t^2}\right)\cdot\left(\frac{2+t^2}{1+t^2}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt =$$
$$= \int_0^1 \left(2+t^2 - t\cdot(t+\operatorname{arctg} t)\right)dt = \int_0^1 (2 - t\operatorname{arctg} t)\,dt = \underbrace{\int_0^1 2\,dt}_{=2} - \underbrace{\int_0^1 t\operatorname{arctg} t}_{=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(10-\pi)\,.$$

užili jsme substituce $w := \sin t$.

Příklad 10.5:
Vypočítejte křivkový integrál

10.

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^2+y^2}\,ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (x,y)\,d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{array} \qquad t \in \langle 0,\pi\rangle\,.$$

5!

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((t\cos t)',\, (t\sin t)' \right) = \left(\cos t - t\sin t\,,\ \sin t + t\cos t \right)\,.$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\,dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (x,y)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (t\cos t\,,\ t\sin t)\cdot(\cos t - t\sin t\,,\ \sin t + t\cos t)\,dt = \int_0^\pi t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2\,.$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme navíc ještě velikost tečného vektoru

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2} =$$
$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t} = \sqrt{1+t^2}\,.$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{\tau}|\,dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^2+y^2}\,ds = \int_0^\pi \sqrt{1+t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\cdot\sqrt{1+t^2}\,dt =$$
$$= \int_0^\pi (1+t^2)\,dt = \left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^\pi = \frac{\pi}{3}(3+\pi^2)\,.$$

Příklad 10.6:
Vypočítejte křivkový integrál

7.

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}\,ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\cos 2t \\ y = \sin t \end{array} \qquad t \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2}\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor a jeho velikost

$$\vec{\tau} = \left((\tfrac{1}{2}\cos 2t)',\, (\sin t)' \right) = (-\sin 2t\,,\ \cos t)\,, \qquad |\vec{\tau}| = \sqrt{(-\sin 2t)^2 + \cos^2 t} = \sqrt{4\sin^2 t + 1}\cdot\cos t\,.$$

Zbývá dosadit do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\,dt$ a dopočítat

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\sin^2 t+1}}\sqrt{4\sin^2 t + 1}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\,.$$

Příklad 10.7:
Vypočítejte křivkový integrál

10!

$$\int_\gamma (y^3, x^2)\,d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ y = t \end{array} \qquad t \in \langle 1,2\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left(\left(\frac{1}{t}\right)',\, (t)' \right) = \left(-\frac{1}{t^2}\,,\ 1 \right)\,.$$

Odtud dosadíme do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\,dt$ a počítáme

$$\int_\gamma (y^3, x^2)\,d\vec{r} = \int_1^2 \left(t^3, \frac{1}{t^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}, 1\right)dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - t\right)dt = \left[-\frac{1}{t} - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = -1\,.$$

Příklad 10.8:
Vypočítejte křivkový integrál

8.

$$\int_\gamma \sqrt{x+y+\frac{1}{2}}\,ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = t+\sqrt{t} \\ y = t-\sqrt{t} \end{array} \qquad t \in \langle 1,4\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((t+\sqrt{t})',\, (t-\sqrt{t})' \right) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}\,,\ 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right)$$

a jeho velikost

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{4t}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\,.$$

Dosadíme do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\,dt$ a dopočítáme

$$\int_\gamma \sqrt{x+y+\frac{1}{2}}\,ds = \int_1^4 \sqrt{2t+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\,dt = \int_1^4 \frac{4t+1}{2\sqrt{t}}\,dt =$$
$$= 2\int_1^4 \sqrt{t}\,dt + \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{4}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_1^4 + \left[\sqrt{t}\right]_1^4 = \frac{31}{3}\,.$$

Příklad 10.9:
Vypočítejte křivkový integrál

9!

$$\int_\gamma (y^2, -xy)\,d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = t + \operatorname{arctg} t \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{array} \qquad t \in \langle 0,1\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((t+\operatorname{arctg} t)',\, \left(\sqrt{1+t^2}\right)' \right) = \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\,,\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) = \left(\frac{2+t^2}{1+t^2}\,,\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)\,.$$

Odtud dosadíme do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\,dt$ a počítáme

$$\int_\gamma (y^2, -xy)\,d\vec{r} = \int_0^1 \left(1+t^2, -(t+\operatorname{arctg} t)\sqrt{1+t^2}\right)\cdot\left(\frac{2+t^2}{1+t^2}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt =$$
$$= \int_0^1 \left(2+t^2 - t\cdot(t+\operatorname{arctg} t)\right)dt = \int_0^1 (2 - t\operatorname{arctg} t)\,dt = \underbrace{\int_0^1 2\,dt}_{=2} - \underbrace{\int_0^1 t\operatorname{arctg} t}_{=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(10-\pi)\,.$$