1

Příklad 6.5. Určete velikost S části pláště válce $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$, omezené shora rovinou $x + y + z = 2$ (znázorněte si daný útvar na obrázku).

Jedná se o plochu, jejímž půdorysem je oblouk C (jednotková kružnice v rovině xy se středem v počátku) a která je shora omezená grafem funkce $f(x, y) = 2 - x - y$. Dostáváme tak, že hledaný plášť má velikost

$$S = \int_C (2 - x - y)\ \mathrm{d}s.$$

Volbou parametrizace $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ máme

$$S = \int_0^{2\pi} (2 - \cos t - \sin t)\ \mathrm{d}t = 4\pi.$$

Zatím máme zaveden křivkový integrál podél oblouků. Protože každá křivka C se skládá z konečně mnoha na sebe navazujících oblouků $C_1, \dots, C_n$, položíme

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f\,\mathrm{d}s. \tag{6.9}$$

Toto bude definovat *křivkový integrál funkce f podél křivky C.*

Ukázali jsme, že křivkový integrál reprezentuje hmotnost křivky se zadanou funkcí hustoty. Podobně je možno pomocí křivkového integrálu $\int_C f\ \mathrm{d}s$ stanovit celkové množství dané kvantity (náboje, tepla, apod.), známe-li funkci f popisující její koncentraci podél křivky C. Z tohoto pohledu můžeme poměr celkového množství (tj. integrálu $\int_C f\ \mathrm{d}s$) k délce křivky chápat jako střední hodnotu funkce f na dané křivce. Následující věta říká, že střední hodnota je vždy rovna hodnotě funkce f v nějakém bodě uvažované křivky.

Věta 6.6. *Nechť f je spojitá funkce na křivce C. Pak existuje bod $(x, y, z) \in C$ tak, že*

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = f(x, y, z) \cdot l(C).$$

Důkaz. Nechť $\varphi\colon \langle a, b\rangle \longrightarrow C$ je parametrizace křivky C. Funkce $f \circ \varphi\colon \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkce, která tento interval zobrazí na jistý interval $\langle c, d\rangle$, viz [1], Kapitola 4. Tedy $f(C) = \langle c, d\rangle$. Na druhé straně monotonie křivkového integrálu říká, že

$$c \cdot l(C) = \min_C(f) \cdot l(C) \leq \int_C f \leq \max_C(f) \cdot l(C) = d \cdot l(C).$$

Tedy $c \leq \dfrac{1}{l(C)} \displaystyle\int_C f \leq d$. Existuje proto alespoň jeden bod $(x, y, z) \in C$ tak, že

$$\frac{1}{l(C)} \int_C f = f(x, y, z).$$

□

Potom

$$\int_C \left(2\sqrt{x^2+y^2} - z\right) \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} - t\right) \sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(2+4\pi^2)^3} - 2\sqrt{2}\right).$$

V příkladech 1.6 – 1.15 vypočítejte křivkové integrály podél křivky C.

Příklad 1.6. $\int_C \frac{x+2y+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, *kde C je úsečka s krajními body* $(1,-1)$, $(4,0)$.
Výsledek: $\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)$.

Příklad 1.7. $\int_C xy\,\mathrm{d}s$, *kde C je obvod obdélníku určeného přímkami* $x=0$, $x=4$, $y=0$, $y=2$.
Výsledek: 24

Příklad 1.8. $\int_C \frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}s$, *kde C je část paraboly* $y^2=2x$, $y \in \langle\sqrt{2}, 2\rangle$.
Výsledek: $(25\sqrt{5}-6\sqrt{3})/30$

Příklad 1.9. $\int_C x^2y\,\mathrm{d}s$, *kde C je oblouk kružnice* $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ *s koncovými body* $(a,0)$, $(0,a)$.
Výsledek: $a^4/3$

Příklad 1.10. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, *kde C je kružnice* $x^2+y^2-ax=0$ $(a>0)$.
Výsledek: $2a^2$

Příklad 1.11. $\int_C |y|\,\mathrm{d}s$, *kde C je lemniskáta* $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$.
Výsledek: $2a^2(2-\sqrt{2})$

Příklad 1.12. $\int_C \sqrt{2y}\,\mathrm{d}s$, *kde C část cykloidy s parametrizací*
$\psi(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a>0)$.
Výsledek: $4\pi a^{3/2}$

Příklad 1.13. $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, *kde C je šroubovice* $\psi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.
Výsledek: $8\pi^3\sqrt{2}/3$

Příklad 1.14. $\int_C x^2\,\mathrm{d}s$, *kde C je průniková křivka ploch* $x^2+y^2+z^2=1$, $x-z=0$.
Výsledek: $\pi/2$

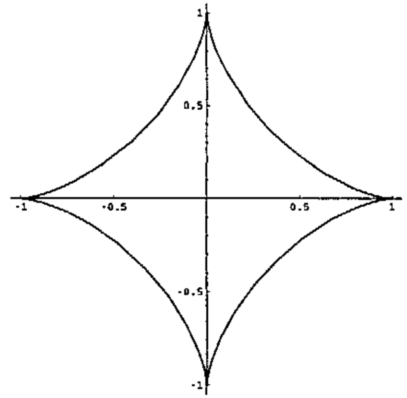
Příklad 1.15. $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$, *kde C je část kružnice* $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x$ $(a>0)$, *ležící v prvním oktantu.*
Výsledek: $\sqrt{2}a^2$

Aplikace křivkového integrálu prvního druhu

Geometrické aplikace

(I) Nechť C je jednoduchá křivka. Potom délka této křivky je dána vztahem

$$\int_C \mathrm{d}s. \tag{1}$$



Obr. 2

(II) Nechť C je jednoduchá rovinná křivka (v rovině xy), f je spojitá funkce dvou proměnných nezáporná v bodech křivky C a

$$\kappa = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in C \wedge 0 \le z \le f(x,y)\right\}$$

je válcová plocha (určená řídicí křivkou C s přímkami rovnoběžnými s osou z, zdola omezená křivkou C a shora průnikem grafu funkce $z=f(x,y)$ a plochy κ). Potom pro obsah S válcové plochy κ platí

$$S = \int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

2.

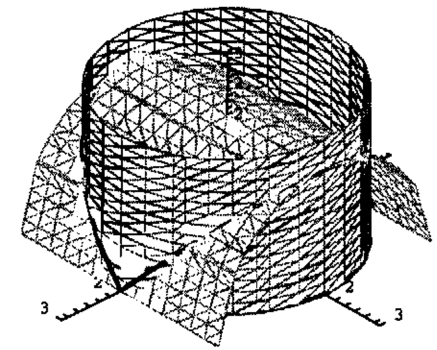
Příklad 1.16. *Vypočítejme délku asteroidy C jejíž parametrizace je* $\psi(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ $a>0$, $t \in \langle 0, 2\pi)$.

Řešení: Asteroida není hladká křivka, neboť v bodech $(a,0)$, $(0,a)$, $(-a,0)$, $(0,-a)$ k ní neexistuje tečný vektor. Platí totiž

$$\psi'(t) = (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t),$$

a např. pro $t=0$ je $\psi(0)=(a,0)$ a $\psi'(0)=(0,0)$, tj. v bodě $(a,0)$ neexistuje tečný vektor. Analogicky je tomu i v ostatních uvedených bodech. V těchto bodech jsou na křivce body vratu (Obr. 2 pro $a=1$).

Křivku C tedy budeme uvažovat jako spojení čtyř jednoduchých křivek, které na sebe navazují. Protože funkce $F(x,y) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{a^2}$ je sudá v proměnné x i v proměnné y, je zřejmé, že křivka C je souměrná podle osy y i podle osy x a k výpočtu její délky stačí vypočítat pouze délku její části C_1 ležící v první kvadrantu a její délku pak násobit čtyřmi.



Obr. 3

Nejdříve určíme

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = 3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t} = 3a\cos t\sin t.$$

Odtud

$$\int_C \mathrm{d}s = 4\int_{C_1}\mathrm{d}s = 4\int_0^{\pi/2} 3a\cos t\sin t\,\mathrm{d}t = 12a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{6a.}}$$

Příklad 1.17. *Vypočítejme obsah válcové plochy (Obr.3)*

$$\kappa = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4 \wedge 0\le z\le\sqrt{4-x^2}\right\}.$$

Řešení:

Podle (2) je obsah válcové plochy roven číslu

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

kde C je její řídicí křivka a plocha je zdola omezena rovinou $z=0$ a shora grafem funkce $f(x,y)=\sqrt{4-x^2}$.

Křivka C (kružnice) je parametrizována funkcí $\psi(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$. Potom $\psi'(t)=(-2\sin t, 2\cos t)$ a odtud

$$\begin{aligned}\int_C \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi}\sqrt{4-4\cos^2 t}\,2\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \\ &= 4\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t + 4\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)\,\mathrm{d}t = 4\left([-\cos t]_0^{\pi}+[\cos t]_{\pi}^{2\pi}\right) = 16.\end{aligned}$$

Příklad 1.18. *Vypočítejte délku křivky C s parametrizací $\psi(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, jejímiž krajními body jsou $(0,0,0)$, $(3,3,2)$.* ***Výsledek:*** 5

Příklad 1.19. *Vypočítejte délku křivky C s parametrizací $\psi(t) = (\mathrm{e}^t\cos t, \mathrm{e}^t\sin t, \mathrm{e}^t)$, $t\in\langle 0,1\rangle$.* ***Výsledek:*** $\sqrt{3}(\mathrm{e}-1)$

V příkladech 1.20 – 1.27 vypočítejte obsahy daných válcových ploch.

Příklad 1.20. $\kappa = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \wedge 0\le z\le\sqrt{\frac{9x^2}{4}+\frac{4y^2}{9}}\right\}.$
Výsledek: 13π

Příklad 1.21. $\kappa = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+\frac{y^2}{4}=1 \wedge 0\le z\le\sqrt{4x^2+\frac{y^2}{4}}\right\}.$
Výsledek: 5π

Příklad 1.22. $\kappa = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=\frac{1}{2}x^2 \wedge 0\le z\le x+\sqrt{2y} \wedge x\in\langle 0,1\rangle\right\}.$
Výsledek: $2(2\sqrt{2}-1)/3$

Příklad 1.23. $\kappa = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=\frac{1}{3}x^3 \wedge 0\le z\le x^3+3y \wedge x\in\langle 0,1\rangle\right\}.$
Výsledek: $(2\sqrt{2}-1)/3$

Příklad 1.24. $\kappa = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=2\sqrt{x} \wedge 0\le z\le \frac{y}{x+1} \wedge x\in\langle 0,3\rangle\right\}.$
Výsledek: 4

Příklad 1.25. $\kappa = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=\sqrt{2y} \wedge 0\le z\le \frac{x}{2y+1} \wedge y\in\langle 0,4\rangle\right\}.$
Výsledek: 2

Příklad 1.26. $\kappa = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=\ln x \wedge 0\le z\le \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \wedge x\in\langle 1,\mathrm{e}\rangle\right\}.$
Výsledek: $1/2$

Příklad 1.27. $\kappa = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=\sin x \wedge 0\le z\le \frac{y\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+1}} \wedge x\in\langle 0,\pi/2\rangle\right\}.$
Výsledek: $1/2$

Fyzikální aplikace

Nechť C je jednoduchá hmotná křivka, jejíž hustota v každém jejím bodě (x,y,z) je $h(x,y,z)$.

(I) Hmotnost m této křivky je

$$m = \int_C h(x,y,z)\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

(II) Statický moment této křivky vzhledem k rovině xy, resp. vzhledem k rovině xz, resp. vzhledem k rovině yz je

$$S_{xy} = \int_C zh(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\quad S_{xz} = \int_C yh(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\quad S_{yz} = \int_C xh(x,y,z)\,\mathrm{d}s. \tag{4}$$

2 Cvičení

12. **Úloha.** Určete $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, kde C je kružnice v rovině se středem v bodě $(1/2, 0)$ a s poloměrem $1/2$.

Řešení. Volbou parametrizace

$$\varphi(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

máme $\|\varphi'(t)\| = 1/2$ a tedy

Hint

$$\begin{aligned}
\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin t\right)^2}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} |\cos u|\,\mathrm{d}u = 2.
\end{aligned}$$

3 **Úloha.** Vypočtěte obsah plotu S, jehož půdorys tvoří elipsa

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

víme-li, že výška v bodě (x, y) je rovna $\sqrt{(1/4)x^2 + 4y^2}$.

Řešení. Hledaný obsah S je dán křivkovým integrálem

$$S = \int_C \sqrt{(1/4)x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}s.$$

Volba parametrizace $\varphi(t) = (10\cos t, 5\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pak dá

Hint

$$\begin{aligned}
\int_C \sqrt{(1/4)x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{25\cos^2 t + 100\sin^2 t} \cdot \sqrt{100\sin^2 t + 25\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 25\cos^2 t + 100\sin^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 25\frac{1+\cos 2t}{2} + 100\frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = 125\pi.
\end{aligned}$$

Úloha. Určete hmotnost m drátu ve tvaru oblouku cykloidy

$$C = \{(r(t - \sin t), r(1 - \cos t)) \mid t \in \langle 0, 2\pi \rangle\},$$

je-li hustota rovna druhé mocnině vzdálenosti daného bodu od osy x.