1 V **Příklad 1.60.** *Užitím Greenovy věty vypočítejme křivkový integrál*

$$\oint_C (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná elipsa $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, $(a > 0, b > 0)$.

Řešení: Připomeňme, že je-li $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ rovinné vektorové pole a C jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, jež tvoří hranici množiny M, pak podle Greenovy věty platí, že tok tohoto vektorového pole přes hranici množiny M (tj. křivku C) je roven úhrnému množství divergence tohoto pole na M. Tedy platí

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_M \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}A, \tag{12}$$

tj.

$$\oint_C -Q(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_M \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}A. \tag{13}$$

Chceme-li nyní použít k výpočtu integrálu $\oint_{(C)}(x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y$ vzorec (13), znamená to, že místo toku vektorového pole $\mathbf{F}(x,y) = (-(x-y), -(x+y))$ přes křivku C, můžeme počítat úhrné množství divergence tohoto pole na M. Protože $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y) = (-1,-1)$, je

$$\oint_{(C)} (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y = \int_M (-1-1)\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -2abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \underline{\underline{-2ab\pi}}$$

(Dvojný integrál jsme vypočítali substitucí pomocí zobecněných polárních souřadnic.)

2 **Příklad 1.61.** *Užitím Greenovy věty vypočítejme křivkový integrál*

$$\oint_{(C)} \left(\frac{1}{x} + 2xy - \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná hranice množiny

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \wedge \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}\,x\right\}.$$

Řešení: Protože počítaný křivkový integrál nám opět představuje levou stranu ve vzorci (13), je

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3}, -\frac{1}{x} - 2xy + \frac{y^3}{3}\right).$$

Odtud

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y) = (2x + x^2, -2x + y^2).$$

Podle vzorce (13) pak dostáváme

$$\oint_{(C)} \left(\frac{1}{x} + 2xy - \frac{y^3}{3}\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3}\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \int_M (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A = \int_2^3 \int_{\pi/6}^{\pi/3} r^3 \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = \frac{65}{24}\pi.$$

(Dvojný integrál jsme vypočítali substitucí pomocí polárních souřadnic.)

Příklad 1.62. *Vypočítejme obsah plochy omezené jedním obloukem cykloidy s parametrizací* $\boldsymbol{\psi}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ *(*$a > 0$*),* $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ *a osou* x.

Řešení: Jednoduchým důsledkem Greenovy věty je vzorec pro výpočet míry (obsahu) množiny M ohraničené uzavřenou kladně orientovanou křivkou C. Zvolíme-li např.

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad \text{je} \quad \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

a podle vzorce (13) je

$$\frac{1}{2}\oint_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_M \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}A = \int_M \mathrm{d}A = \mu(M). \tag{14}$$

Obecně stačí, zvolíme-li si libovolné rovinné vektorové pole $\mathbf{F}$, jehož $\operatorname{div}\mathbf{F} = 1$. Zvolíme-li např. $\mathbf{F}(x,y) = (x, 0)$ a z (13) dostáváme další vztah pro výpočet míry množiny

$$\oint_C x\,\mathrm{d}y = \int_M 1 \cdot \mathrm{d}A = \int_M \mathrm{d}A = \mu(M). \tag{15}$$

V našem případě je hranice množiny M tvořena dvěma jednoduchými na sebe navazujícími křivkami C_1 a C_2, kde C_1 je část osy x mezi body $(0,0)$ a $(2a\pi, 0)$ a C_2 je oblouk cykloidy vycházející z bodu $(2a\pi, 0)$ a vracející se do bodu $(0,0)$. Hranice je pak při takto zvolené orientaci orientována kladně. (Připomeňme jednoduché pravidlo pro určení orientace uzavřené křivky - hranice množiny: Procházíme-li křivkou ve směru zvolené orientace a máme-li uzavřenou množinu po levé ruce, je křivka orientována kladně. V případě, že množina je po pravé ruce, je křivka orientována záporně.) Je tedy

$$\mu(M) = \frac{1}{2}\oint_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_{C_1} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\oint_{C_2} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y.$$

Křivku C_1 parametrizujeme funkcí $\boldsymbol{\psi}(t) = (t, 0)$, $t \in \langle 0, 2a\pi\rangle$. Snadno zjistíme, že

$$\frac{1}{2}\oint_{C_1} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Křivka C_2 je parametrizována funkcí $\boldsymbol{\psi}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Protože jsme hranici množiny orientovali kladně, postupujeme po křivce C_2 proti rostoucímu parametru, a to znamená, že při výpočtu druhého integrálu musíme u tohoto integrálu změnit znaménko. Je tedy po úpravě

$$\frac{1}{2}\oint_{C_2} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (-2 + 2\cos t + t\sin t)\,\mathrm{d}t = 3a^2\pi,$$

12. Greenova, Stokesova a Gaussova-Ostrogradského věta

V tomto odstavci se budeme zabývat větami týkajícími se křivkových a plošných integrálů. Zopakujeme pouze vzorce, přesné formulace najde čtenář opět v [1], [2], [3], [7].

Greenova věta (1. verze):

$$\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\nu_0}\, ds\ ,$$

kde $\vec{\nu_0}$ je vnější normálový vektor hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω, který má velikost 1, tedy $|\vec{\nu_0}| = 1$, podobně značíme jednotkový tečný (nebo směrový) vektor hranice $\vec{\tau_0} = \vec{\nu_0}^\perp$. Uvědomíme si, že $\operatorname{div} \vec{f}(x)$ znamená zdroj, zřídlo vektorové funkce $\vec{f}$ v bodě x. Pak lze přiblížit fyzikální smysl věty následovně: „Kolik funkce $\vec{f}$ v oblasti Ω vznikne, tolik musí odtéci přes její hranici."

Greenova věta (2. verze):

$$\iint_\Omega \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{f}\, d\vec{r}\ .$$

Tento vzorec obdržíme, když do první verze dosadíme funkci $-\vec{f}^\perp$, uvědomíme si, že pro libovolné vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ platí $\vec{u}^\perp \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v}^\perp$ a $d\vec{r} = \vec{\tau_0}\, ds$

$$\iint_\Omega -\operatorname{div} \vec{f}^\perp\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} -\vec{f}^\perp \cdot \vec{\nu_0}\, ds = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\nu_0}^\perp\, ds = -\int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\tau_0}\, ds = \int_{\partial\Omega} \vec{f}\, d\vec{r}\, .$$

Gaussova - Ostrogradského věta:

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{f} d\vec{S}\ .$$

Jde o zobecnění 1. verze Greenovy věty pro třírozměrné těleso (připomeňme jen $d\vec{S} = \vec{\nu_0}\, dS$). Fyzikální smysl zůstává stejný.

Stokesova věta:

$$\iint_\kappa \operatorname{rot} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_\gamma \vec{f}\, d\vec{r}\ ,$$

kde křivka γ tvoří „okraj" plochy κ. I zde jde o jisté zobecnění Greenovy věty (tentokrát 2. verze) pro „křivou" plochu v prostoru, neboť výraz $-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}$ je jen třetí složka $\operatorname{rot} \vec{f}$. Protože $\operatorname{rot} \vec{f}(x)$ znamená cirkulaci vektorové funkce $\vec{f}$ v bodě x, fyzikální smysl této věty lze přiblížit představou: „Celková cirkulace funkce $\vec{f}$ na ploše κ se musí projevit na jejím okraji γ."

Příklad 12.1:

3 Ověřte Greenovu větu pro funkci

$$\vec{f}(x, y) = (x^3 y, 2xy)$$

a pro oblast Ω tvořenou vnitřkem elipsy se středem v počátku $[0, 0]$ s poloosami $a = 5$ a $b = 3$.

řešení:

Budeme ověřovat 2. verzi Greenovy věty

$$\iint_\Omega \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{f}\, d\vec{r}\ .$$

Derivováním obdržíme výraz v dvojném integrálu na levé straně rovnosti

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = -x^3 + 2y\ .$$

Zadanou elipsu vyjádříme obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1\ , \quad \text{odkud vyjádříme} \quad y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}\ ,$$

a levou stranu pak počítáme pomocí Fubiniovy věty

$$\iint_\Omega (-x^3+2y)\,dx\,dy = \int_{-5}^{5}\left(\int_{-\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}(-x^3+2y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-5}^{5}\left[-x^3y+y^2\right]_{y:=-\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}^{y:=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}\,dx = \int_{-5}^{5} -\frac{6}{5}x^3\sqrt{25-x^2}\,dx = -\frac{6}{5}\int_{-5}^{5} x^3\sqrt{25-x^2}\,dx = \underline{\underline{0}}\,,$$

neboť integrál z liché funkce na intervalu symetrickém podle počátku je roven nule.

Pro výpočet pravé strany rovnosti využijeme parametrické vyjádření zadané elipsy

$$\partial\Omega:\quad \begin{array}{l} x = 5\cos t \\ \underline{y = 3\sin t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

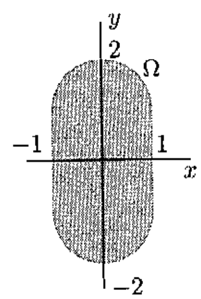
Odtud dostaneme tečný vektor $\vec{\tau} = (\,-5\sin t\,,\,3\cos t\,)$ a dopočítáme příslušný křivkový integrál

$$\int_{\partial\Omega}(x^3y, 2xy)\,d\vec{r} = \int_0^{2\pi}(375\cos^3 t\sin t\,,\,30\cos t\sin t)\cdot(-5\sin t\,,\,3\cos t)\,dt =$$

$$= -1875\underbrace{\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)\sin^2 t\cos t\,dt}_{=0} + 90\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin t\,dt}_{=0} = \underline{\underline{0}}\,.$$

Příklad 12.2:

Ověřte Greenovu větu pro funkci



$$\vec{f}(x,y) = (-y, x^2)$$

a pro oblast Ω na obrázku.

řešení:

Budeme ověřovat 2. verzi Greenovy věty

$$\iint_\Omega\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)dx\,dy = \int_{\partial\Omega}\vec{f}\,d\vec{r}\,.$$

Derivováním obdržíme výraz v dvojném integrálu na levé straně rovnosti

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x+1\,.$$

Vyjádříme horní a dolní část hranice oblasti funkčním vztahem

$$y_H = 1+\sqrt{1-x^2} \qquad y_D = -1-\sqrt{1-x^2}$$

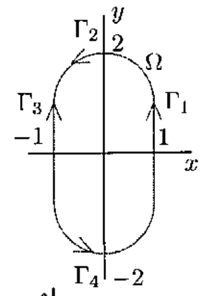
a levou stranu pak počítáme pomocí Fubiniovy věty

$$\iint_\Omega(2x+1)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}(2x+1)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}(2x+1)\,[y]_{y:=-1-\sqrt{1-x^2}}^{y:=1+\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{1}(2x+1)(1+\sqrt{1-x^2})\,dx = 2\underbrace{\int_{-1}^{1}(2x+1)\,dx}_{=2} + 4\underbrace{\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx}_{=0} + 2\underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx}_{=\frac{\pi}{2}} = 4+\pi\,,$$

poslední integrál vypočítáme nejlépe substitucí $x = \sin t$.

Pro výpočet pravé strany rovnosti využijeme parametrické vyjádření jednotlivých částí hranice oblasti $\partial\Omega = \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 + \Gamma_4$ a křivkový integrál rozdělíme na čtyři



$$\int_{\partial\Omega} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} .$$

Pro každou část hranice uvedeme její parametrické vyjádření, vektor $\vec{\tau}$ a příslušný křivkový integrál.

Počítáme první část

$$\Gamma_1 : \begin{array}{l} x = 1 \\ \underline{y = t} \end{array} \quad t \in \langle -1, 1\rangle , \quad \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (0,1) \quad \text{a integrál } \int_{\Gamma_1} (-y, x^2)\, d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (-t, 1)\cdot(0,1)\, dt = 2 .$$

Následuje druhá část

$$\Gamma_2 : \begin{array}{l} x = \cos t \\ \underline{y = 1 + \sin t} \end{array} \quad t \in \langle 0, \pi\rangle , \quad \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (-\sin t, \cos t) \quad \text{a integrál } \int_{\Gamma_2} (-y, x^2)\, d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-1 - \sin t, \cos^2 t\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{\pi} \left(\sin t + \sin^2 t + \cos^3 t\right)\, dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi} \sin t\, dt}_{=-[\cos t]_0^{\pi}=2} + \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt}_{=\left[\frac{1}{2}(x - \sin t \cos t)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^3 t\, dt}_{=0} = 2 + \frac{\pi}{2} .$$

Výpočet třetí části je podobný jako u první části,

$$\Gamma_3 : \begin{array}{l} x = -1 \\ \underline{y = t} \end{array} \quad t \in \langle -1, 1\rangle , \quad \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (0,1) \quad \text{a integrál } \int_{\Gamma_3} (-y, x^2)\, d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (-t, 1)\cdot(0,1)\, dt = 2 .$$

Konečně čtvrtá část (podobná druhé části)

$$\Gamma_4 : \begin{array}{l} x = \cos t \\ \underline{y = -1 + \sin t} \end{array} \quad t \in \langle \pi, 2\pi\rangle , \quad \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (-\sin t, \cos t) \quad \text{a integrál } \int_{\Gamma_4} (-y, x^2)\, d\vec{r} =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \left(1 - \sin t, \cos^2 t\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \cos^3 t\, dt = 2 + \frac{\pi}{2} .$$

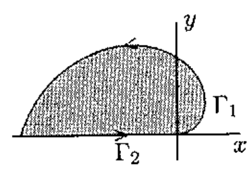
Celkově se i pravá strana rovná $4 + \pi$ a Greenova věta je ověřená.

4

Příklad 12.3:
Užijte Greenovu větu pro funkce

$$\vec{f}(x,y) = (xy, y^2) \qquad \vec{g}(x,y) = (x^2, xy) \qquad \vec{h}(x,y) = (-y, x)$$

a pro oblast Ω ohraničenou křivkou Γ_1 a osou x, kde



$$\Gamma_1 : \begin{array}{l} x = t\cos t \\ \underline{y = t\sin t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, \pi\rangle .$$

Vypočítejte tak dvojné integrály

$$\iint_{\Omega} x\, dxdy \qquad \iint_{\Omega} y\, dxdy \qquad \iint_{\Omega} 1\, dxdy .$$

řešení:
Výraz v dvojném integrálu na pravé straně 2. verze Greenovy věty pro funkce $\vec{f}$, $\vec{g}$ a $\vec{h}$ skutečně dává po řadě

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = -x \qquad -\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial x} = y \qquad -\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x} = 2 .$$

Hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω sestává ze dvou částí, z křivky Γ_1 a z části osy x. Můžeme psát $\partial\Omega = \Gamma_1 + \Gamma_2$, kde

$$\Gamma_2: \quad \begin{array}{l} x = -\pi + t \\ \underline{y = 0} \end{array} \qquad t \in \langle 0, \pi \rangle .$$

Počítejme tečný vektor pro křivku Γ_1 a označme ho $\tau_1 = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)$ a pro křivku Γ_2 pak $\tau_2 = (1, 0)$.
Pro $\vec{f}$ obdržíme z Greenovy věty

$$\iint_\Omega -x\,dx\,dy = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} \vec{f}\,d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{f}\,d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{f}\,d\vec{r} = \underline{\underline{\pi^2 - 4}}$$

neboť

$$\int_{\Gamma_1} (xy, y^2)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (t^2\cos t\sin t\,,\, t^2\sin^2 t)\cdot(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)\,dt = \int_0^\pi t^2 \sin t\,dt =$$

$$= [-t^2\cos t]_0^\pi + 2\int_0^\pi t\cos t\,dt = \pi^2 + 2\left([t\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\,dt\right) = \pi^2 - 2\cdot 2 = \pi^2 - 4\ ,$$

(použili jsme dvakrát metodu per partes) a

$$\int_{\Gamma_2} (xy, y^2)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (0,0)\cdot(1,0)\,dt = 0\ .$$

Pro $\vec{g}$ obdržíme z Greenovy věty

$$\iint_\Omega y\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \vec{g}\,d\vec{r} = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial x}\right) dxdy = \int_{\Gamma_1} \vec{g}\,d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{g}\,d\vec{r} = \underline{\underline{-2\pi + \frac{1}{3}\pi^3}}$$

neboť

$$\int_{\Gamma_1} (x^2, xy)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (t^2\cos^2 t\,,\, t^2\cos t\sin t)\cdot(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)\,dt = \int_0^\pi t^2\cos t\,dt =$$

$$= [t^2\sin t]_0^\pi - 2\int_0^\pi t\sin t\,dt = -2\left([-t\cos t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t\,dt\right) = -2\pi$$

a

$$\int_{\Gamma_2} (x^2, xy)\,d\vec{r} = \int_0^\pi ((t-\pi)^2, 0)\cdot(1,0)\,dt = \int_0^\pi (t-\pi)^2\,dt = \left[\frac{1}{3}(t-\pi)^3\right]_0^\pi = \frac{1}{3}\pi^3\ .$$

Pro $\vec{h}$ obdržíme z Greenovy věty

$$\iint_\Omega 2\,dx\,dy = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} \vec{h}\,d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{h}\,d\vec{r} - \int_{\Gamma_2} \vec{h}\,d\vec{r} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi^3}}$$

neboť

$$\int_{\Gamma_1} (-y, x)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (-t\sin t\,,\, t\cos t)\cdot(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)\,dt = \int_0^\pi t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^\pi = \frac{1}{3}\pi^3$$

a

$$\int_{\Gamma_2} (-y, x)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (0, \pi - t)\cdot(1,0)\,dt = 0\ .$$

Zapíšeme výsledky

$$\iint_\Omega x\,dxdy = 4 - \pi^2\ , \qquad \iint_\Omega y\,dxdy = \frac{1}{3}\pi^3 - 2\pi\ , \qquad \iint_\Omega 1\,dxdy = \frac{1}{6}\pi^3\ .$$

Příklad 12.4:
Zjistěte souřadnice těžiště rovinného útvaru z předchozího příkladu. (Předpokládáme, že hmota je rozložena stejnoměrně, neboli hustota je konstatní $\rho(x,y) = 1$.)

řešení:
Pro souřadnice těžiště T platí

$$x_T = \frac{M_x}{m} \ \text{ a } \ y_T = \frac{M_y}{m}\ , \text{ kde } M_x = \iint_\Omega x\rho(x,y)dxdy \quad M_y = \iint_\Omega y\rho(x,y)dxdy \ \text{ a } \ m = \iint_\Omega \rho(x,y)dxdy\ ,$$