2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. *Křivkou C v $\mathbb{R}^2$* rozumíme **spojité** zobrazení $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\Phi = (\varphi, \psi)$, kde $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ jsou spojité.

Křivka se nazývá

- *uzavřená*, jestliže $\Phi(a) = \Phi(b)$,
- *oblouk*, jestliže Φ je prosté na $[a,b]$,
- *Jordanova*, jestliže Φ je prosté na $[a,b)$ a křivka je uzavřená,
- *jednoduchá*, jestliže je buď Jordanova nebo oblouk,
- *hladká*, jestliže je jednoduchá a
  - funkce φ, ψ mají spojité první derivace
  - pro každé $t \in [a,b]$ je alespoň jedna z derivací $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ nenulová.

Orientace křivky znamený, že je dán směr zvětšování délky. Parametrizace křivky je *souhlasná*, pokud směr orientace souhlasí se směrem daným zvětšováním parametru.

Pro Jordanovu křivku v rovině je *kladná orientace* **proti** směru hodinových ručiček.

Definice 2 (Křivkový integrál 1. druhu)**.** Nechť C je **po částech hladká** křivka a nechť je dána funkce $f : C \to \mathbb{R}$. Pak definujeme *křivkový integrál 1. druhu funkce f podél křivky C* jako

$$\int_C f(s)\mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t = \int_a^b f(\Phi(t))|\Phi'(t)|\mathrm{d}t.$$

Definice 3 (Křivkový integrál 2. druhu)**.** Nechť C je **po částech hladká** křivka orientovaná **souhlasně** a nechť je dána funkce $f = (f_1, f_2) : C \to \mathbb{R}^2$. Pak definujeme *křivkový integrál 2. druhu funkce f podél křivky C* jako

$$\int_C \mathbf{f}(s)\mathrm{d}s = \int_a^b f_1((\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_2((\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) = \int_a^b f(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)\mathrm{d}t.$$

Věta 4 (Greenova věta)**.** Nechť H je otevřená množina v $\mathbb{R}^2$ obsahující **po částech hladkou Jordanovu** křivku C i s jejím **vnitřkem** ιC. Nechť funkce $f = (f_1, f_2) : H \to \mathbb{R}^2$ má **spojité parciální derivace** na H. Pak

$$\oint_C f(s)\mathrm{d}s = \int_{\iota C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\oint$ značí křivkový integrál přes **kladnou** orientaci křivky (proti směru hodinových ručiček).

Příklady

1. druhu

   1. $$\int_C x + y \mathrm{d}s,$$

      kde C je úsečka s krajními body $(0,0)$ a $(1,2)$.

   2. $$\int_C x^2 + y^2 \mathrm{d}s,$$

      kde C je kružnice se středem v počátku a poloměrem $r > 0$.

   3. $$\int_C x + y \mathrm{d}s,$$

      kde C je obvod trojúhelníka s vrcholy $(0,0)$, $(0,2)$ a $(1,0)$.

   4. $$\int_C \sqrt{1+y} \mathrm{d}s,$$

      kde C jest $(t + \cos t, \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

   5. $$\int_C 3xy^2,$$

      kde C jest $(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

   6. $$\int_C x^2 \mathrm{d}s,$$

      kde pro C platí $y = \ln x$, $x \in [1,2]$.

      Hint: substituce $u = t^2 + 1$.

   7. $$\int_C \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}} \mathrm{d}s,$$

      kde C je $(\frac{1}{2} \cos 2t, \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

   8. $$\int_C \sqrt{x + y + \frac{1}{2}} \mathrm{d}s,$$

      kde C jest $(t + \sqrt{t}, t - \sqrt{t})$, $t \in [0,4]$.

9.
$$\int_C \frac{16x}{\sqrt{y^4+64}}\mathrm{d}s,$$
kde C je $(t-\ln t, 2\sqrt{2t})$, $t \in [1,3]$.

10.
$$\int_C \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}s,$$
kde C j $(t\cos t, t\sin t)$, $t \in [0,\pi]$.

11.
$$\int_C x^2+y^2,$$
kde C je $(a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t))$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

12.
$$\int_C \sqrt{x^2+y^2},$$
kde C je kružnice se středem v bodě $(1/2, 0)$ a poloměrem $1/2$.

13.
$$\int_C \frac{1}{x\sqrt{1+8y2}}\mathrm{d}s,$$
kde C je $(1/t, \frac{1}{2}t^2)$, $t \in [1,2]$.

2. druhu

1. $f = (2-y, 1+x)$, C je obvod trojúhelníka s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, orientace dána pořadí vrcholů.
2. $f = (x^2-2xy, y^2-2xy)$, C je parabola $y = x^2$, $x \in [-1,1]$.
3. $f = (2y - \ln x, x^2)$, C je $(t^2, \ln t)$, $t \in [1,2]$.
4. $f = (x-y, x+y)$, C je úsečka mezi body $(2,3)$, $(3,5)$.
5. $f = (x,y)$, C je $(t\cos t, t\sin t)$, $t \in [0,\pi]$.
6. $f = (2-y, x)$, C je $(t-\sin t, 1-\cos t)$, $t \in [0,2\pi]$.
7. $f = (x,y)$, C je $(\sqrt{1+t}, \sqrt{1-t})$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$.
8. $f = (x-y, x+y)$, C je je část grafu $f(y) = y^2$, $y \in [0,2]$.
9. $f = (y^2, -xy)$, C je $(t + \arctan\, t, \sqrt{1+t^2})$, $t \in [0,1]$.
10. $f = (y^3, x^2)$, C je $(1/t, t)$, $t \in [1,2]$.

Green

1.
$$\oint_C (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a, b > 0$.

2.
$$\oint_C \left(\frac{1}{x} + 2xy - \frac{y^3}{3}\right)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná hranice množiny $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ a $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x$.

3. Ověřte Greenovu větu pro funkci $f = (x^3y, 2xy)$ a oblast tvořenou vnitřkem elipsy se středem v počátku a poloosami $a = 5$, $b = 3$.

4. Užijte Greenovu větu pro funkce $f = (xy, y^2)$, $g = (x^2, xy)$, $h = (-y, x)$, přes oblast ohraničenou osou x a křivkou $t\cos t, t\sin t$.

   Vypočtěte tak dvojné integrály

$$\iint_{\iota C} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\iota C} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\iota C} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Aplikace 1. druhu

1. Určete velikost části pláště válce $x^2+y^2 = 1$, omezené shora rovinou $x+y+z = 2$.

2. Určete délku asteroidy s parametrizací $(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

3. Vypočtěte obsah plotu, jehož půdorys tvoří elipsa

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

   a jeho výška v bodě (x, y) je rovna $= \sqrt{x^2/4 + 4y^2}$.