9.3 Taylorova a Maclaurinova řada

1. **Příklad 9.3.** Rozviňte následující funkce v Maclaurinovu řadu

$$\text{a)} f(x) = \cos x^2.$$

Řešení. Nejprve položíme $x^2 = t$. Dostáváme funkci $\cos t$, jejíž rozvoj je

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poté dosazením za $t = x^2$ dostáváme požadovanou Maclaurinovu řadu

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.

$$\text{b)} f(x) = \arcsin x.$$

Řešení. Nejprve zadanou funkci zderivujeme. Platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Položíme-li $-x^2 = t$, dostaneme funkci $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$, jejíž rozvoj do binomické řady je

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} t + \binom{-\frac{1}{2}}{2} t^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{2} t + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} t^2 + \cdots$$

Dosazením za $t = -x^2$ dostáváme

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \cdots$$

a integrací dané řady máme

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} ds = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} s^4 + \cdots\right) ds = \\ &= x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} + \cdots \end{aligned}$$

$$\text{c)} f(x) = \frac{1}{3 - 2x}.$$

Řešení. Nejprve zadanou funkci upravíme

(b) $\sin x$

Řešení: Použijeme vyjádření koeficientů v lokální Taylorově větě. K tomu stačí spočítat n-tou derivaci dané funkce a dělit $n!$.

(c) $\cos x$

Řešení: Platí, že

$$(\cos x)^{(4n+1)} = -\sin x, \quad (\cos x)^{(4n+2)} = -\cos x,$$
$$(\cos x)^{(4n+3)} = \sin x, \quad (\cos x)^{(4n)} = \cos x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a tedy

$$(\cos x)^{(4n+1)}(0) = 0, \quad (\cos x)^{(4n+2)} = -1, \quad (\cos x)^{(4n+3)}(0) = 0,$$
$$(\cos x)^{(4n)} = 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

všechny liché derivace jsou tedy nulové a sudé lze vyjádřit jedním vztahem

$$(\cos x)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(d) $\ln(1+x)$ **Řešení:** Platí, že

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}, \qquad [\ln(1+x)]'' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$
$$[\ln(1+x)]''' = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \qquad [\ln(1+x)]'''' = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}$$

odkud lze vyvodit, že

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

V nule dostaneme

$$[\ln(1+x)]^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

2

3. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$\boxed{f(x) = e^{2x-x^2}}$$

do pátého řádu.

Řešení: Podle vztahu pro rozvoj exponenciální funkce dostaneme

$$e^{2x-x^2} = 1 + (2x - x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} =$$

$$= 1+(2x-x^2)+\frac{1}{2}(4x^2-4x^3+x^4)+\frac{1}{6}(8x^3-12x^4+6x^5+o(x^5))+\frac{1}{24}(16x^4-32x^5+o(x^5))$$
$$+\frac{1}{120}(32x^5 + o(x^5)) =$$
$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{1}{3-2x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}x}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{-1}.$$

Poté položíme $-\frac{2}{3}x=t$ a dostaneme funkci $\frac{1}{3}(1+t)^{-1}$. Její rozvoj do binomické řady je

$$\frac{1}{3}(1+t)^{-1}=\frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}t+\binom{-1}{2}t^2+\cdots+\binom{-1}{n}t^{+}\cdot\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}t^n,\quad t\in(-1,1).$$

Po dosazení za $t=-\frac{2}{3}x$ získáme Maclaurinovu řadu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3-2x} &= \frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\binom{-1}{n}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n+\cdots\right]= \\
&= 1+(-1)\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\frac{(-1)^n n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n(-1)^n x^n+\cdots= \\
&= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2x^2+\cdots+\frac{n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n+\cdots\right]= \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n.
\end{aligned}$$

4.

d) $f(x)=e^{\cos x}$.

Řešení. Provedeme rozvoje v Maclaurinovu řadu pro funkce e^x a $\cos x$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e\cdot e^{-\frac{x^2}{2!}}\cdot e^{\frac{x^4}{4!}}+\cdots=e\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2}{2!}+\cdots\right]\left[1+\frac{x^4}{4!}+\frac{\left(\frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!}+\cdots\right]= \\
&= e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^4}{24}+\frac{x^8}{2\cdot 24^2}+\cdots\right)=e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

3.

e) $f(x)=e^x\sin x$.

Řešení. Maclaurinova řada pro funkci e^x (viz předchozí příklad) a $\sin x$ je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Nyní obě řady navzájem vynásobíme a dostaneme Maclaurinovu řadu pro funkci $e^x \sin x$

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24} + \cdots = \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots \end{aligned}$$

Cvičení 9.3. Rozviňte následující funkce v Maclaurinovu řadu

a) $f(x) = e^{-x^2}$ $\left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} + \cdots\right]$

b) $f(x) = \sin 2x$ $\left[2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + \cdots\right]$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ $\left[1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^9 + \cdots\right]$

d) $f(x) = (1+x)\,e^x$ $\left[1 + 2x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \cdots\right]$

e) $f(x) = \ln(1 + e^x)$ $\left[\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots\right]$

Příklad 9.4. Rozložte v Taylorovu řadu následující funkce

a) $f(x) = \sqrt{x^3}$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} & &\Rightarrow & f'(1) &= \tfrac{3}{2}, \\ f''(x) &= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & &\Rightarrow & f''(2) &= \tfrac{3}{2^2}, \\ f'''(x) &= -\tfrac{3}{2^2}\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} & &\Rightarrow & f'''(3) &= -\tfrac{3}{2^3}. \end{aligned}$$

Dosazením do Taylorovy řady dostáváme

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2 - \frac{3}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3 + \cdots = \\ &= 1 + \frac{3}{2}\left[(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(x-1)^3}{2^2\cdot 3!} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

$$V(x)^2 = \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!3!} + 2\frac{x^4}{2!4!} + 2\frac{x^5}{2!5!} + 2\frac{x^5}{3!4!} + o(x^5)$$

$$V(x)^3 = \frac{x^3}{2!2!2!} + 3\frac{x^4}{2!2!3!} + 3\frac{x^5}{2!2!4!} + 3\frac{x^5}{2!3!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^4 = \frac{x^4}{2!2!2!2!} + 4\frac{x^5}{2!2!2!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^5 = \frac{x^5}{2!2!2!2!2!} + o(x^5)$$

Když všechny příspěvky sečteme, resp. odečteme, dostaneme

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^5)$$

6.

8. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

do pátého řádu.

Řešení: Je

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} =$$

na vhodném okolí nuly

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^k =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) +$$

$$(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} - \frac{x^5}{3!2!} + o(x^5) + \frac{x^5}{2!2!} + o(x^5) + o(x^5) =$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

7 **Příklad 3.7:** Rozviňme funkci $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}}$ do mocninné řady s použitím rozvoje vhodné funkce.

Řešení: Pro všechna $x \neq 1$ platí

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+x}.$$

Protože funkce $F(x)$ je součtem geometrické řady s kvocientem $-x$, platí pro $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

$((-1)^n x^n)' = n(-1)^n x^{(n-1)}$. Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(-1)^n x^{(n-1)}$ je stejnoměrně konvergentní na $\langle -x_0, x_0\rangle$ pro $x_0 < 1$, můžeme tedy derivovat řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ člen po členu a platí

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2} &= -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\, x^{n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) x^n, \quad \text{pro } x \in \langle -x_0, x_0\rangle.\end{aligned}$$

Dostali jsme rozvoj naší funkce do mocninné řady

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) x^n \quad \text{pro } |x| < 1.$$

11 **Příklad 3.8:** Rozviňme funkci $\boxed{f(x) = \operatorname{arctg} x}$ do mocninné řady s použitím rozvoje vhodné funkce.

Řešení: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Protože funkce $f'(x)$ je součtem geometrické řady s kvocientem $(-x^2)$, platí pro $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ je stejnoměrně konvergentní na $\langle -x_0, x_0\rangle$ pro $x_0 < 1$, můžeme tedy integrovat řadu člen po členu a platí

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{pro } x \in \langle -x_0, x_0\rangle.$$

Dostali jsme rozvoj naší funkce do mocninné řady

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pro } |x| < 1 .$$

Protože řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{na } \langle -1, 1 \rangle .$$

Cvičení 3.3: V následujících cvičení najděte rozvoj funkce $f(x)$ do mocninné řady s použitím rozvoje vhodné funkce.

a) e^{x^2}, **b)** $x \sin x$, **c)** $\ln(1+x)$, **d)** $\dfrac{1}{(1+x)^3}$.

8.

Příklad 2.20. Užitím základních rozvojů najděte Maclaurinovu řadu funkce $f(x) = \cos^2 x$ a určete obor, ve kterém se součet této řady rovná funkci f.

Řešení. Podle známého goniometrického vzorce platí

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2x).$$

Podle základního rozvoje pro funkci kosinus pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

Dosazením $t = 2x$ dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \\ &= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.\end{aligned}$$

Tento rozvoj dosadíme do úvodního vztahu a upravíme

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) = \\ &= 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Nalezená Maclaurinova řada má součet rovný $\cos^2 x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.21. Užitím základních rozvojů najděte Maclaurinovu řadu funkce $f(x) = \sin^3 x$ a určete obor, ve kterém se součet této řady rovná funkci f.

Řešení. Výraz $\sin^3 x$ upravíme pomocí goniometrických vzorců následovně:

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \sin^2 x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \cdot (\sin x - \sin x \cdot \cos 2x) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\sin x - \left(-\frac{1}{2} \cdot (\sin x - \sin 3x)\right)\right] = \frac{1}{4} \cdot (3 \sin x - \sin 3x).\end{aligned}$$

Ze základního rozvoje pro funkci sinus

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (t \in \mathbb{R})$$

9.

Příklad 2.23. Užitím základních rozvojů najděte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Řešení. Definiční obor dané funkce je dán nerovností $\frac{1+x}{1-x} > 0$, tedy $x \in (-1,1)$. Pro taková x jsou oba dva výrazy $1+x$ i $1-x$ kladné, takže můžeme psát

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln(1+x)^{\frac{1}{2}} - \ln(1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\ln(1+x) - \frac{1}{2}\cdot\ln(1-x) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\Big[\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big].$$

Podle základního rozvoje funkce logaritmus platí

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad \text{je-li } x \in (-1,1\rangle,$$

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \cdots + (-1)^n\cdot\frac{x^n}{n} - \cdots, \quad \text{je-li } x \in \langle -1,1).$$

Oba tyto rozvoje dosadíme do původního vztahu pro každé $x \in (-1,1)$ a upravíme:

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\cdot\Big[\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n} + \cdots + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\cdot\frac{x^n}{n} + \cdots\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(2x + \frac{2x^3}{3} + \cdots + \frac{2\cdot x^{2n+1}}{2n+1} + \right) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Rovnost $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ platí pro každé $x \in (-1,1)$.

Příklad 2.24. Užitím základních rozvojů najděte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Řešení. Položíme-li $t = -x$, dostáváme funkci $f(t) = \frac{1}{(1+t)^2} = (1+t)^{-2}$.
Její rozvoj do binomické řady je pro každé $t \in (-1,1)$ tvaru

$$(1+t)^{-2} = 1 + \binom{-2}{1}\cdot t + \binom{-2}{2}\cdot t^2 + \cdots + \binom{-2}{n}\cdot t^n + \cdots =$$
$$= 1 - 2t + 3t^2 - \cdots + (-1)^n\cdot(n+1)\cdot t^n + \cdots,$$

4. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

do čtvrtého řádu. Určete $f^{(4)}(0)$.

Řešení: Na nějakém okolí nuly, kde $|x-x^2| < 1$, platí rovnost

$$\frac{1+x+x^2}{1-(x-x^2)}$$
$$= (1+x+x^2) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x-x^2)^k =$$
$$(1+x+x^2) + (1+x+x^2)(x-x^2) + (1+x+x^2)(x-x^2)^2$$
$$+(1+x+x^2)(x-x^2)^3 + (1+x+x^2)(x-x^2)^4 + o(x^4) =$$
$$= (1+x+x^2) + (x+x^2+x^3-x^2-x^3-x^4)$$
$$+(x^2+x^3+x^4-2x^3-2x^4+x^4+o(x^4)) + (x^3+x^4-3x^4+o(x^4))$$
$$+(x^4+o(x^4)) + o(x^4) =$$
$$= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$$

Z jednoznačnosti rozvoje pak vyplývá, že $f^{(4)}(0)/4! = -2$, a tedy $f^{(4)}(0) = -48$.

10.

5. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$\boxed{f(x) = \ln(\cos x)}$$

do šestého řádu.

Řešení:

Je

$$f(x) = \ln(\cos x) = \ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)) =$$

Označme $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$

$$= V(x) - \frac{V(x)^2}{2} + \frac{V(x)^3}{3} + o(x^6) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2}\frac{x^4}{24} + o(x^6)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8} + o(x^6)\right) =$$
$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$$

12.

6. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$\boxed{f(x) = \sin(\sin x)}$$

do třetího řádu.

Řešení: Je

$$f(x) = \sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) =$$

Označme $V(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= V(x) - \frac{V(x)^3}{6} + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

7. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

do čtvrtého řádu.

Řešení:

Na vhodném okolí nuly je

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + o(x^6)} =$$

$$\frac{1}{1 + x/2! + x^2/3! + x^3/4! + x^4/5! + o(x^5)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right)^k =$$

Označme $V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$

$$= 1 - V(x) + V(x)^2 - V(x)^3 + V(x)^4 - V(x)^5 + o(x^5).$$

Rozveďme jednotlivé mocniny $V(x)$ do pátého řádu.

$$V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$$