(1) $i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^{125} = i^{124} \cdot i = \underline{\underline{i}}$

$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i^2} = \underline{\underline{i}}$

$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$

$i^{-78} = \frac{1}{i^{78}} = \frac{1}{i^{40}} \cdot \frac{1}{i^{36}} \cdot \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = \underline{\underline{-1}}$

(2) najdi č. komplexně sdružené z

(b) $\overline{\left(\frac{3+4i}{1-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{(3+4i)(1+2i)}{1-4i^2}\right)} = \overline{\left(\frac{3+6i+4i+8i^2}{5}\right)} =$

$= \frac{1}{5}(-5+10i) = \underline{\underline{-1-2i}}$

$\frac{\overline{1+i}}{\overline{2-i}} = \frac{1-i}{2+i} = \frac{(1-i)(2-i)}{2-i^2} = \frac{1}{5}(2+i^2-3i) =$

$= \underline{\underline{\frac{1}{5} - \frac{3i}{5}}}$

(2)

(a) $\frac{2+i}{i} + \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i-1} = \frac{(2+i)i}{-1} + \frac{i(i-1)}{i^2-1} - \frac{(2i+1)(i+1)}{i^2-1}$

$= -2i+1 + \frac{1}{-2}(-1-i) - \frac{1}{-2}(-2+1+2i+i) =$

$= -2i + 1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{i}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}i = \underline{\underline{1}}$

(2)(c) dokažte že se sobě rovnají č.

$z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}) + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$z_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{i}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\sqrt{2-\sqrt{3}} \overset{?}{=} \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad |^2$

$2-\sqrt{3} = \frac{1}{4}6 + \frac{1}{4}2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{6}$

$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$ ✓

$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} \overset{?}{=} \sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\sqrt{2} + \sqrt{6} = 2\sqrt{2+3^{\frac{1}{2}}} \quad |^2$

$2+6+2\sqrt{2\cdot 6} = 4(2+\sqrt{3})$

$8 + 2\sqrt{2\cdot 2\cdot 3} = 8+4\sqrt{3}$ ✓

(3) ABS

$$\left|\frac{4-2i}{3+i}\right| = \left|\frac{(4-2i)(3-i)}{9+1}\right| = \left|\frac{1}{10}\left(12-4i-6i+2i^2\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{10}\left|10-10i\right| = \left|1-i\right| = \sqrt{1+1} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

$$\left|\frac{|4-3i|+i}{3-2i}\right| = \left|\frac{5+i}{3-2i}\right| = \left|\frac{(5+i)(3+2i)}{13}\right| =$$

$$= \frac{1}{13}\left|15+10i+3i-2\right| = \left|1+i\right| = \sqrt{2}$$

(4.) Gon. tvar

$$3 = 3 \cdot 1 = 3(1+0i) = 3(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$10-10i = 10(1-i) = 10 \cdot \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) =$$

$$= \underline{10\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} + i \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

(5) a opačně

$$5(\cos 11\pi + i \sin 11\pi) = 5(\cos\pi + i \sin\pi) =$$
$$= 5(-1 + i \cdot 0) = \underline{-5}$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\underbrace{\frac{105}{4}}_{104\frac{1}{4}}\pi + i \sin\frac{105}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{1+i}$$

(7) rovnice $\quad x, y \in \mathbb{R}$

· $2x + iy = 4 - 3i \qquad x = 2 \quad \underline{y = -3}$

· $x(1+i) + y(1-i) = 4 + 2i$

$(x+y) = 4 \qquad x - y = 2 \qquad 2x = 6 \quad x = 3 \quad \underline{y = 1}$

· $x(y+i) + y(x-i) = 2x + 2yi$

$xy + xi + yx - iy = 2x + 2yi$

$2xy = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad y = 0$

$(x-y) = 2y \qquad y = 1 \quad x = 3$

(8) kvadr. rce $\quad x \in \mathbb{C}$

$ix^2 - 3x + 4i = 0$

$z_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4i \cdot 4i}}{2i}$

$= \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{2i}$

$z_1 = \dfrac{4}{i} = -4i$

$z_2 = -\dfrac{1}{i} = 1i$

$z^2 - 6iz - 12 = 0$

$z_{1,2} = \dfrac{6i \pm \sqrt{-36 + 48}}{2} = 3i \pm \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \underline{3i \pm \sqrt{3}}$

$z^2 - 6iz - 9 = 0$

$z_{1,2} = \dfrac{6i \pm \sqrt{-36 + 36}}{2} = 3i$

$3z^2 - 2z + 1 = 0$

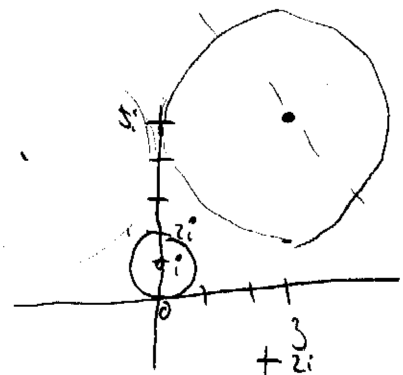
$z_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-8}}{6} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{6}$

$8i^2$

(6) Vykreslete čísla, pro něž

- $|z+3-5i| = 3$

  $|z - (-3+5i)| = 3$ (od; střed; r) kružnice



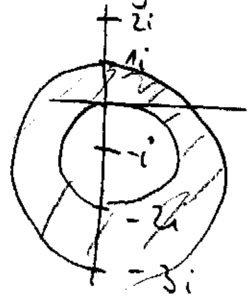
- $|z - i| = 1$ (od)

  $x_0 = i$

  $r = 1$ kružnice

- $1 < |z+i| < 2$

  $x_0 = -i$ mezikruží mezi $r_2 = 1$ a $r_1 = 2$



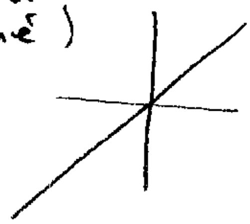
- $|z| = 1 - 2i$

  Abs $= \mathbb{R}$, nelze $\emptyset$

- $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

  vzdálenost od obou os je stejná (a navíc obě zd. či záporné)

  $\to$ na 1. 3. kvadrant



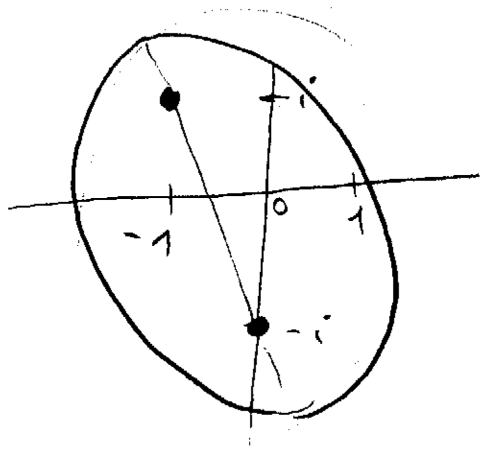
- $\operatorname{Im} z = -i$ h.F.

  $\operatorname{Im} \in \mathbb{R}$ $\emptyset$

- $|z+i| + |z+1-i| = 4$

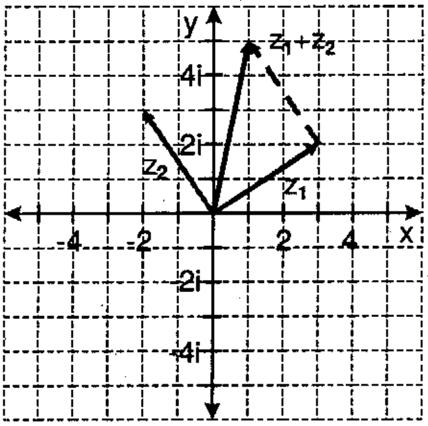
  $|z-(-i)| + |z-(-1+i)| = 4$

  ! elipsa - ohniska



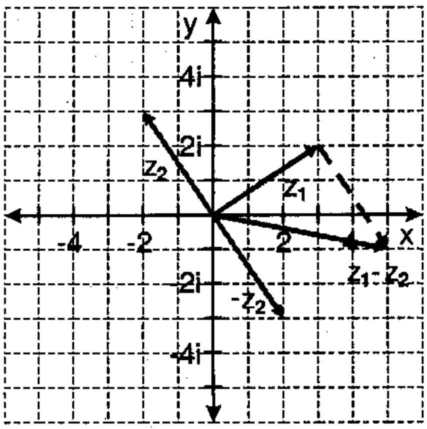
Př. 2: Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 3+2i$ a $z_2 = -2+3i$. Zobraz je v Gaussově rovině jako vektory a poté graficky spočti: a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$
Výsledky ověř graficky.

a) $z_1 + z_2$



Z obrázku je vidět, že platí: $z_1 + z_2 = 1+5i$
Ověříme početně:
$z_1 + z_2 = 3+2i+(-2+3i) = 1+5i$

b) $z_1 - z_2$

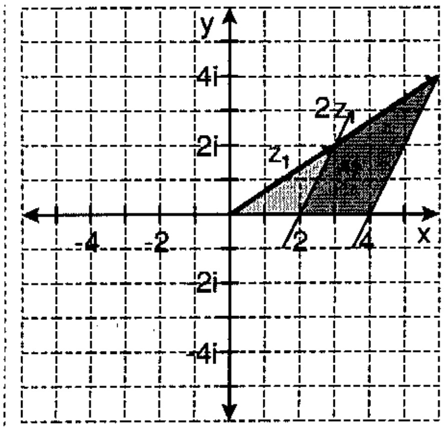


Z obrázku je vidět, že platí: $z_1 - z_2 = 5-i$
Ověříme početně:
$z_1 - z_2 = 3+2i-(-2+3i) = 5+i$

Co dál?
Vektory můžeme násobit reálným číslem $\Rightarrow$ změníme jejich délku, někdy i obrátíme směr.

Př. 3: Je dáno komplexní číslo $z_1 = 3+2i$. Graficky urči $2z_1$. Výsledek ověř výpočtem.

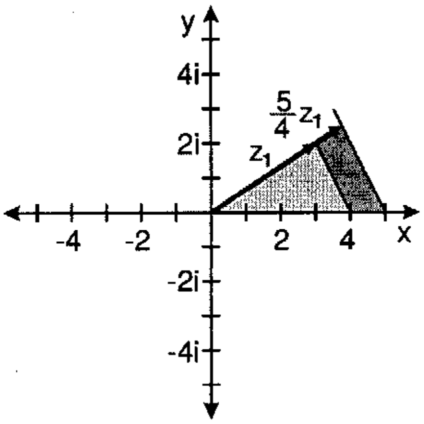
$2z_1$ - musíme dvakrát zvětši velikost vektoru $\Rightarrow$ pomocí podobnosti trojúhelníků



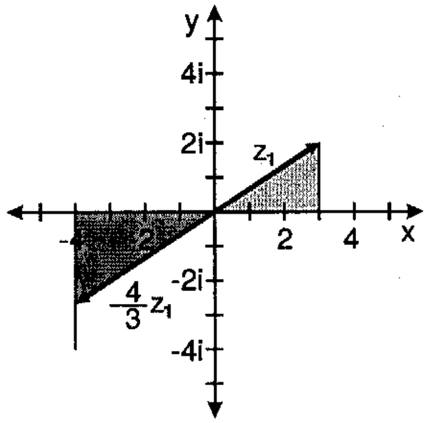
Př. 4: Je dáno komplexní číslo $z_1 = 3 + 2i$. Graficky urči čísla:

a) $\frac{5}{4}z_1$ b) $-\frac{4}{3}z_1$

a) $\frac{5}{4}z_1$



b) $-\frac{4}{3}z_1$



Zkusíme ještě násobení.
Nejdřív pro jednoduchost libovolné komplexní číslo z a komplexní jednotku w.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $w = \cos\alpha + i\sin\alpha$

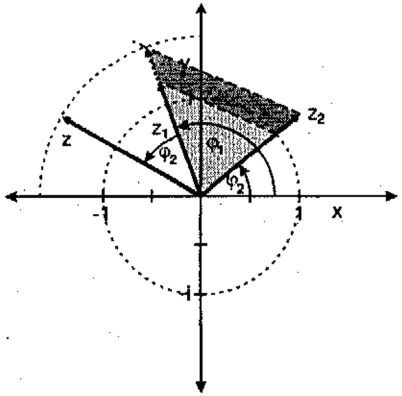
$z \cdot w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r\left[\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)\right]$

Porovnáváme: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $z \cdot w = r\left[\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)\right]$

$\Rightarrow$ obě čísla mají stejnou absolutní hodnotu (a jejich vektory stejnou délku), číslo $z \cdot w$ je pootočené o úhel α

Př. 5: Na obrázku Gaussovy roviny je pomocí vektorů znázorněno komplexní číslo z a komplexní jednotka w. Znázorni do obrázku komplexní číslo $z \cdot w$.

Stačí otočit vektor čísla z o úhel α.



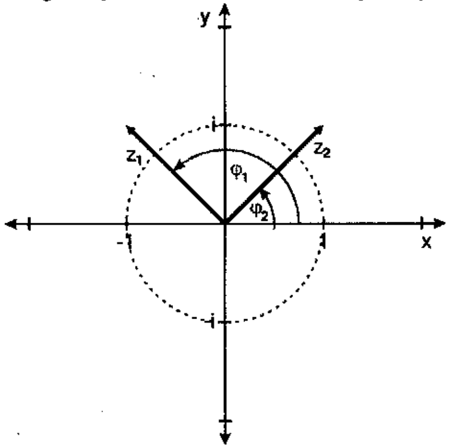
Pedagogická poznámka: Dost studentů nebude schopno celý příklad samostatně vyřešit. Pro ně příklad pomocí tabule rozfázujeme na dvě části.

Př. 7: Urči graficky i početně součin $(-1+i)(1+i)$.

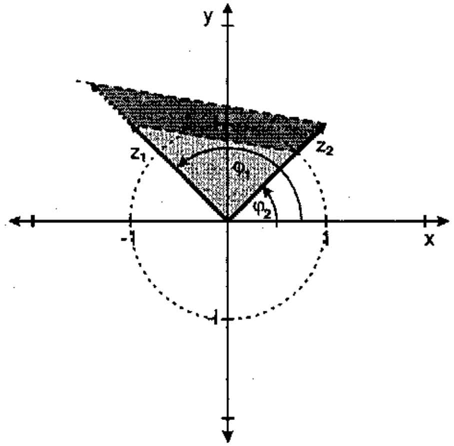
Početně: $(-1+i)(1+i)=-1-i+i+i^2=-2$

Označíme čísla: $z_1=-1+i$, $z_2=1+i$

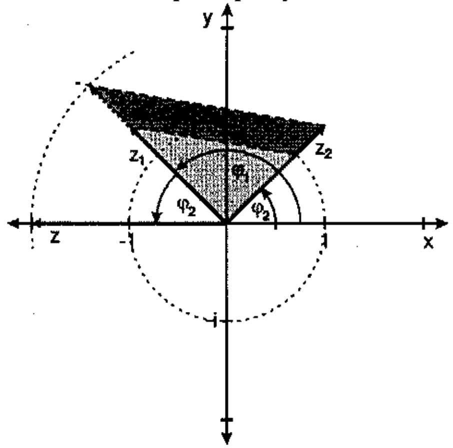
Teď graficky: zakreslíme čísla do Gaussovy roviny:



Teď najdeme délky výsledného vektoru.



Otočíme vektor do správné polohy.



Grafický výsledek souhlasí s početním.

Př. 8: Urči graficky i početně podíl: $\dfrac{-1+i}{1+i}$.

Početně: $\dfrac{-1+i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{-1+i+i-i^2}{1+1}=\dfrac{2i}{2}=i$

Označíme čísla: $z_1=-1+i$, $z_2=1+i$

Teď graficky: nejdřív provedeme dělení v goniometrickém tvaru:

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ $\qquad$ $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

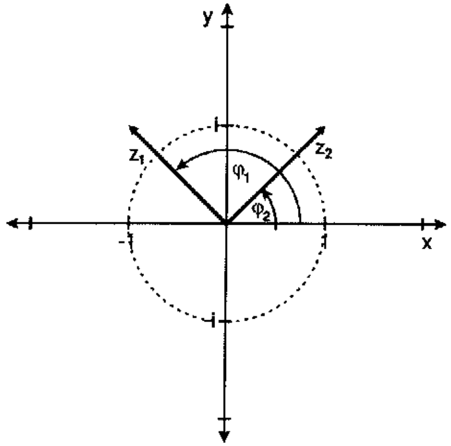
$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right]$$

S úhlem pracujeme podobně jako u násobení, ale úhly odečítáme.

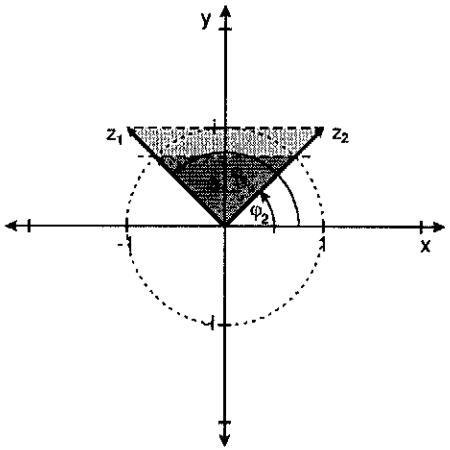
Velikost určíme ze vzorce: $r=r_1r_2$ $\Rightarrow$ to už jsme dělali v geometrii

$r=\frac{r_1}{r_2}\Rightarrow\frac{r}{1}=\frac{r_1}{r_2}$ - podobnost trojúhelníků

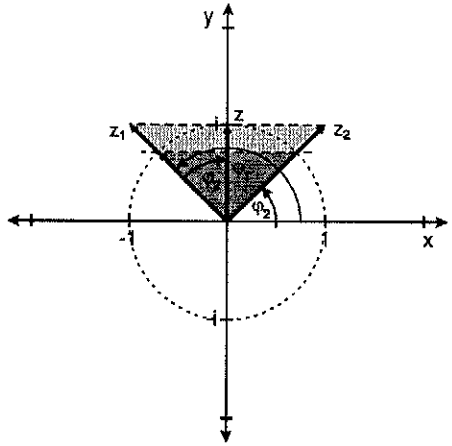
Zakreslíme čísla do Gaussovy roviny:



Teď najdeme délku výsledného vektoru. $r=\frac{r_1}{r_2}\Rightarrow\frac{r}{1}=\frac{r_1}{r_2}$



Otočíme vektor do správné polohy.



Grafický výsledek souhlasí s početním.

Př. 9: Petáková:
strana 135/cvičení 15 c)
strana 135/cvičení 16 a) b)
strana 135/cvičení 17 b) c)

Shrnutí: