

1. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>

kytaristka@gmail.com

Teorie

- $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$
- $\bar{z} = a - bi$
- $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
- $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Příklady

1. Upravte

(a) $i^2, i^3, i^4, i^{125}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-78}$

(b) $\frac{2+i}{i} + \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i-1}$

(c) $\frac{3+4i}{1-2i}$

(d) $\frac{1+i}{2-i}$

2. Určete absolutní hodnotu

(a) $\left| \frac{4-2i}{3+i} \right|$

(b) $\left| \frac{|4-3i|+i}{3-2i} \right|$

3. Převeďte na goniometrický tvar

(a) 3

(b) $10 - 10i$

(c) $\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ$

4. A zpět na algebraický

(a) $5(\cos 11\pi + i \sin 11\pi)$

(b) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{105}{4}\pi + i \sin \frac{105}{4}\pi \right)$

5. Vyjádřete $x, y \in \mathbb{R}$

(a) $2x + iy = 4 - 3i$

(b) $x(1+i) + y(1-i) = 4 + 2i$

(c) $x(y+i) + y(x-i) = 2x + 2yi$

6. Vypočítejte $z \in \mathbb{C}$.

(a) $iz^2 - 3z + 4i = 0$

(b) $z^2 - 6iz - 12 = 0$

(c) $z^2 - 6iz - 9 = 0$

(d) $3z^2 - 2z + 1 = 0$

7. Jsou dána čísla $z_1 = 3 + 2i$ a $z_2 = -2 + 3i$. Zakreslete je v Gaussově rovině a řešte graficky

(a) $z_1 + z_2$

(b) z_1/z_2

8. Jsou dána čísla $z_1 = -1 + i$ a $z_2 = 1 + i$. Zakreslete je v Gaussově rovině a řešte graficky

(a) $z_1 \cdot z_2$

(b) $z_1 - z_2$

(c) $2z_1$

9. Zakreslete do komplexní roviny

(a) $|z + 3 - 5i| = 3$

(b) $|z - i| = 1$

(c) $1 < |z + i| < 2$

(d) $|z| = 1 - 2i$

(e) $\Re z = \Im z$

(f) $\Im z = -i$

(g) $|z + i| + |z + 1 - i| = 4$

Rozviňte funkci do mocninné řady

1.

$$f(x) = \cos x^2$$

2.

$$f(x) = e^{2x-x^2}$$

3.

$$f(x) = e^x \sin x$$

4.

$$f(x) = e^{\cos x}$$

5. Zderivujte

$$f(x) = \arcsin x$$

6.

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

7. Zintegrujte

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

8. Návod: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$$f(x) = \cos^2 x$$

9.

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

10.

$$f(x) = \ln \cos x$$

11. Zderivujte

$$f(x) = \arctan x$$

12.

$$f(x) = \sin(\sin x)$$