(1) Určete Laplaceovu transformaci následující funkce

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

je-li funkce 2π-periodická

(1) Spočteme obraz na intervalu $[0, 2\pi]$ (způsob je libo, zde z tabulky nebo integrálem ...)

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\pi} \sin t \; e^{-st} \, dt = \left[\frac{e^{-st}(\cos t + s \sin t)}{s^2+1} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

(2) přidáme periodicitu:

$$\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1} \cdot \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} = \underline{\underline{\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}}}$$

SeR

(2) Vyřešte dif. rovnici na intervalu $(0,\infty)$ pomocí Laplace

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t} \qquad y(0) = -3$$
$$y'(0) = 5$$

Označme $\mathcal{L}(y) = Y$, pak

$$s^2 Y + 3s - 5 - 3sY - 9 + 2Y = \frac{4}{s-2}$$

pak
$$Y\,(s^2 - 3s + 2) = \frac{4}{s-2} - 3s + 14$$

$$Y = \underbrace{\frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-2)^2(s-1)}}_{=:\, g(s)}$$

pomocí parc. zlomků:
$$Y = \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(S-2)^2} - \frac{7}{s-1}$$

pak $\quad y = 4e^{2t} + 4t\,e^{2t} - 7e^{t} \qquad t > 0$

pomocí reziduí: $\quad -3s^2 + 20s - 24$ je stupně menší než $(s-2)^2(s-1)$,

body: $\quad 2$ - pól řádu 2

$\qquad\quad 1$ - pól $\quad 1$

tedy $\quad \operatorname{res}_2 g(z)e^{tz} + \operatorname{res}_1 g(z)e^{tz}$

$$\lim_{z\to 2} \left(\frac{-3z^2 + 20z - 24}{(z-1)} e^{tz}\right)' = \lim \frac{e^{tz}(t(-3z^3 + 23z^2 - 44z + 24)}{(z-1)^2}$$

$$\frac{-3z^2 + 6z + 4)}{} = e^{2t}(+4t + 4)$$

$$\lim_{z\to 1} \frac{-3z^2 + 20z - 24}{(z-2)^2} e^{tz} = e^{t}(-7)$$

celkem: $\quad y = 4e^{2t} + 4te^{2t} - 7e^{t} \qquad t > 0$

(3) Sestavte Euler-Lagrange rovnici (dif. rci nemusíte dopočítat)

$$\int_a^b y^2 + (y')^2 - 2y \sin x \, dx \qquad f = y^2 + y'^2 - 2y \sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 \sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 2y'$$

Rce: $$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

pak $$2y'' + 0 + (0 - 2y + 2 \sin x) = 0$$

tedy $$\underline{\underline{2y'' - 2y = -2 \sin x}}$$

(4) $\int_0^1 12xy + (y')^2 \, dx$ Najděte kritické funkce

$y(0) = 0$

$y(1) = 2$

řešení $f = 12xy + y'^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2y'$

pak $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$

$2y'' + 0 + (0 - 12x) = 0$

$y'' = 6x$

pak $y' = 3x^2 + c$

$y = x^3 + cx + d$

pak $0 = 0^3 + c \cdot 0 + d \rightarrow d = 0$

$2 = 1 + c \qquad c = 1$

celkem $\underline{\underline{y = x^3 + x}} \qquad x \in (0, 1)$