$$F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{ax^2} - 1}{x^2}\, dx \qquad a \leq 0$$

V

(a) $[a,b) = [0,\infty)$

$J = (-\infty, 0]$

$f = \dfrac{e^{ax^2} - 1}{x^2}$

(b) f spoj. na $[0,\infty) \times (-\infty, 0]$

v 0 lze ale spoj. dodefinovat

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax^2}-1}{ax^2} \cdot a = a \qquad \text{pro } a > 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{0x^2}-1}{x^2} = 0 \qquad a = 0$$

tedy f spoj. na $[0,\infty) \times (-\infty, 0]$

(c) majoranta

$$g(x) = \frac{1 - e^{qx^2}}{x^2} \qquad \text{pro } a \in (q, 0],\ q < 0$$

Závěr $F(a)$ je spojitá na $(-\infty, 0]$

V

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}}\,dx$$

(a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x+\dots+\frac{x^n}{n!}}$

$[a,b) = [0,\infty)$

f_n spoj. ne $[0,\infty)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$

majoranta (pro $n \geq 2$)

$$g(x) = \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n = \int_0^\infty \lim f_n = \int_0^\infty e^{-x} = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = \underline{\underline{1}}$

V

$$F(a,b) = \int_0^\infty \frac{(\operatorname{arctg} bx)^2 - (\operatorname{arctg} ax)^2}{x}\, dx$$

$\boxed{\text{pro } a,b > 0}$ pro $a<b$:

$$= \int_0^\infty \left[\frac{(\operatorname{arctg} yx)^2}{x} \right]_a^b dx = \int_0^\infty \int_a^b \frac{2 \operatorname{arctg} yx}{x} \cdot \frac{1}{1+y^2x^2} \cdot x \, dy\, dx$$

$$\overset{\text{dk}}{\underset{(1)}{=}} \int_a^b \int_0^\infty \frac{2 \operatorname{arctg} yx}{1+y^2x^2}\, dx\, dy = \int_a^b \left[\frac{1}{y} \cdot (\operatorname{arctg} yx)^2 \right]_0^\infty dy$$

$$= \underbrace{\int_a^b \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{y}\, dy}_{(I)} = \frac{\pi^2}{4} (\ln b - \ln a)$$

pro $a,b \neq 0$ vyjde

$F(a,b) = F(|a|,|b|)$ neb funkce je sudá v obou proměnných

Pro $a = 0 \neq b$ a $a \neq 0 = b$ $\int$ divergují (srovnání s $\frac{1}{x}$ u ∞)

Pro $a = 0 = b$ je $F(0,0) = 0$

Pro $a,b>0$, $a>b$, vyjde $-\int_b^a \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{y}\, dy = \frac{\pi^2}{4}(-\ln(a) + \ln b)$

dk: Prohození integrálů na základě toho, že

$\frac{2 \operatorname{arctg} yx}{1+y^2x^2}$ je spoj. a abs. $\int$ na $(a,b) \times (0,\infty)$

! kdyby $a < 0 < b$, tak (1) neprojde — nepůjde prohodit $\int$ a následně (I) bude divergovat

Tento případ přesto projde úvahou o paritě

V

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2}\, dx$$

- $\alpha \lneq 0$

- $$F'(\alpha) = \int_0^\infty e^{\alpha x^2}\, dx \underset{t = \sqrt{-a}\, x}{=} \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt \underset{\text{víme :)}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-a}}$$

$F(0$

- podmínky

(a) $[a, b) = [0, \infty)$

$J = (-\infty, 0]$

(b) f spoj. na $[0, \infty) \times (-\infty, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = e^{\alpha x^2}$ spoj. taktéž

(c) $\int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2}}_{f}\, dx$ existuje neboť f je spojitá a absolutně integrovatelná (srovnání s $\frac{1}{x^2}$ u ∞ a u 0 lze spoj. dodefinovat)

(d) majoranta $g(x) = e^{px^2}$ pro $\alpha \in (-\infty, p)$, $p < 0$.