Teorie míry

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1 (Konstrukce integrálu)**.** Nechť $D, D' \in S$ a $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Integrál $\int_D f d\mu$ vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme $D = D'$.

1. Je-li f **nezáporná** měřitelná funkce, definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \sup\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D \text{ }, 0 \leq \alpha_j \leq f \text{ na } A_j, j = 1 \dots m\}.$$

Součty vyskytující se v předchozím vzorci nazýváme dolními součty k funkci f . Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován vždy, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D, definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \int_D f^+ \mathrm{d}\mu + \int_D f^- \mathrm{d}\mu$$

pokud rozdíl v výše má smysl. Pokud

$$\int_D f^+ = \int_D f^- = \infty$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná (přesně: S-měřitelná) funkce na $D' \neq D$ a $\mu(D \ D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \int_{D \cap D'} f \mathrm{d}\mu$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D. V některých případech je účelné používat podrobnější zápis Je-li integrál $\int_D f \mathrm{d}\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál.* Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f \mathrm{d}\mu$ *konverguje* nebo že *f je integrovatelná.*

Věta 2 (Diskuse vztahu mezi Newtonem a Lebesguem)**.** Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b).

1. Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b, konverguje i Newtonův a to absolutně.

2. Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, konverguje i Lebesgueův.

3. Pokud konverguje jak Newtonův tak Lebesgueův, pak mají oba stejnou hodnotu.

4. Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.

Příklady

1. Určete, zda následující systémy jsou σ-algebry (X je neprázdná množina)

   (a) 2^X

   (b) otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$

   (c) $\{\emptyset, X\}$

   (d) omezené množiny v $\mathbb{R}$

   (e) $\{\emptyset, \mathbb{N}, \{1,3,5,7\dots\}, \{2,4,6\dots\}\}$

   (f) spočetné podmnožiny $\mathbb{R}$

2. Určete, zda následující předpisy určují míru

   (a) $\mu(A) = 0$ pro každou $A \subset X$.

   (b) $\mu(A) = 0$ pro každou spočetnou A a $\mu(A) = 1$ pro každou nespočetnou A, $A \subset \mathbb{R}$

   (c) $\mu(A) = \#A$ pro každou $A \subset X$.

   (d) $\mu((a,b)) = b - a$ na $\mathbb{R}$.

   (e) Nechť $\mu_1, \dots \mu_n$ jsou míry na σ-algebře S a $a_1, \dots a_n$ jsou nezáporná čísla. Pak

   $$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(A), \qquad A \in S$$

   je také míra.

   (f) Nechť $\mu_1, \dots$ jsou míry na σ-algebře S takové, že $\mu_i(X) = 1$. Pak

   $$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i(A)}{2^i}, \qquad A \in S$$

   je také míra.

3. Určete λ míru množiny

   (a) $[0,1]$

   (b) $(0,1)$

   (c) $[2,6)$

   (d) $[0,\infty)$

   (e) přímky v $\mathbb{R}^2$

   (f) elipsa v $\mathbb{R}^2$

   (g) paraboloid v $\mathbb{R}^3$

   (h) $\{1\}$

   (i) $\mathbb{Q}$

   (j) $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ v $\mathbb{R}^2$

   (k) Cantorovo diskontinuum

4. Najděte příklad množiny A tak, aby $\lambda(A) > 0$, $A^\circ = \emptyset$

5. Určete, zda je funkce měřitelná

   (a) $f \equiv c$ na $\mathbb{R}$.

   (b) $\mathrm{sgn} x$ na $\mathbb{R}$.

(c) spojité funkce na $\mathbb{R}$.

(d) charakteristická funkce množiny $A \in S$.

6. Určete, jak vypadají měřitelné funkce na σ-algebrách

   (a) $S = 2^X$.

   (b) $S = \{\emptyset, X\}$

7. Vyšetřete **Lebesgueovy** integrály:

   (a) $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x$

   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}x$

   (c) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

   (d) $\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

   (e) Dirichletovy funkce přes interval $[0, 1]$

   (f) Charakteristické funkce Cantorova diskontinua