# Konvergence

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Příklady

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

   **Řešení:** Konverguje - u 0 je funkce spojitá, u $\infty$ srovnáme s $1/x^2$.

2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$

   **Řešení:** Konverguje - na intervalu $[0,1]$ je funkce spojitá, na intervalu $[1,\infty)$ srovnáme s funkcí $e^{-x}$.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\,dx$

   **Řešení:**

   Integrand $f$ je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\,dx$$

   Má-li totiž (absolutně) konvergovat integrál vpravo, pak také konvergují (absolutně) oba integrály vlevo (integrujeme přes menší množinu). Naopak, pokud (absolutně) konvergují integrály vpravo, pak také konverguje (absolutně) integrál vlevo (existencí integrálů je zaručena existence zobecněné primitivní funkce na celém intervalu i konečnost integrálu).[1]

   Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\,dx$$

   Funkce $\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0,1]$, a protože

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arccotg}^a x = (\pi/2)^a$$

   je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b}\,dx$$

[1]) Tento krok v následujících příkladech již nebudeme komentovat

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $b < 1$.

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\,dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1, +\infty)$, a protože

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{arccotg} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x\to0+} x^a \operatorname{arccotg}^a x = 1,$$

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}}\,dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $a + b > 1$ a diverguje jinak.

Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1 > b > 1 - a$. Jinak diverguje.

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x\,dx$

**Řešení:**

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na pravém okolí jedničky je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{2}, \qquad \ln x = \ln(1 + (x-1)) \approx (x-1)$$

(jak dostaneme použitím Taylorova rozvoje logaritmu v nule). Odtud plyne, že konvergence integrálu

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_1^2 (x-1)^a\,dx$$

a použitím substituce $y = x - 1$ dostaneme, že tento je ekvivalentní integrálu

$$\int_0^1 y^a\,dy$$

Poslední integrál konverguje, a to absolutně, pro $a > -1$.

Naopak na okolí nekonečna je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria je konvergence integrálu

$$\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$$

ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^a x}{x}\, dx$$

U tohoto integrálu ale umíme přímo určit primitivní funkci. Na intervalu $(2, +\infty)$ platí, že

$$\int \frac{\ln^a x}{x}\, dx = \int y^a\, dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} + C = \frac{\ln^{a+1} x}{a+1} + C$$

pro $a \neq -1$. Odtud přímo vyplývá, že integrál konverguje pro $a + 1 < 0$, tedy pro $a < -1$.

Hodnotu $a = -1$ lze také vyloučit přímým výpočtem, ale vzhledem k podmínce u jedničky to není nutné.

5. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^4}\, \mathrm{d}x$

**Řešení:** Integrál konverguje absolutně, neb $\frac{|\sin x|}{x^4} \leq \frac{1}{x^4}$.

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^a}\, dx$, $a \in \mathbb{R}$

**Řešení:** Použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

a proto platí

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{\sin x}{x^a}}{\frac{x}{x^a}} = 1,$$

tudíž platí, že integrál (a) konverguje (absolutně), právě když konverguje integrál

$$\int_0^1 \frac{x}{x^a}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}}\, dx$$

o kterém víme, že konverguje (absolutně) pro $a - 1 < 1$, tudíž pro $a < 2$.

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^a}\,dx,\ a \in \mathbb{R}$

**Řešení:**

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

a proto platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{x^a}}{\frac{1}{x^a}} = 1,$$

tudíž platí, že integrál (b) konverguje (absolutně), právě když konverguje integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$$

o kterém víme, že konverguje (absolutně) pro $a < 1$.

8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arccotg} x}}\,dx$

**Řešení:**

Označme $f$ integrand. Integrál rozdělíme na dvě části

$$\int_1^2 f(x)\,dx, \qquad \int_2^\infty f(x)\,dx$$

Použijeme dvakrát srovnávací kritérium, poprvé u jedničky a po druhé u nekonečna.

Protože $\operatorname{arccotg} 1 = \pi/4$ a platí, že

$$x^4 - 1 = (x^2+1)(x+1)(x-1),$$

můžeme u jedničky srovnávat s funkcí $1/\sqrt{x-1}$, neboť máme

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arccotg} x}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)\operatorname{arccotg} x}} = \frac{2}{\pi} \neq 0$$

Protože $f$ je spojitá a nezáporná funkce na $(1,2]$, dostáváme podle limitního srovnávacího kritéria, že konvergence integrálu $\int_1^2 f$ je ekvivalentní s konvergencí integrálu

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

který konverguje, což ověříme přímým výpočtem:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_1^2 = 2.$$

Pojďme na druhou část integrálu $\int_2^{+\infty} f$. Jistě $f$ je spojitá a nezáporná na $[2,+\infty)$, a protože platí, že

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{arccotg} x = 1,$$

můžeme srovnat integrand s funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arccotg} x}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^4\cdot(1/x)}} = x^{-3/2}.$$

Přesněji: platí, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arccotg} x}}}{x^{-3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x\operatorname{arccotg} x}} = 1.$$

Tudíž konvergence integrálu $\int_2^{+\infty} f$ je ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} x^{-3/2}\,dx$$

který konverguje, o čemž se lze přesvědčit přímým výpočtem.[2]

Závěr: Integrál konverguje (absolutně).

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan^{\alpha} x \sin\frac{1}{x^\beta}\,dx$

**Řešení:**

Integrál roztrhneme na dva kusy. Protože pro $x>1$ je $1/x^\beta<1$ (vzhledem k tomu, že podle zadání je $\beta>0$), je integrand na $[2,+\infty)$ nezáporný a spojitý. Použijeme tedy na tomto intervalu srovávací kritérium: na okolí nekonečna platí, že

$$\arctan^{\alpha} x\sin\frac{1}{x^\beta} \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{1}{x^\beta},$$

přesněji platí, že

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan^{\alpha} x\sin\frac{1}{x^\beta}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\frac{1}{x^\beta}} = 1.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy $\int_2^{+\infty} f$ konverguje (absolutně), právě když $\beta>1$.

Na intervalu $[0,2]$ je ale integrand pro $\alpha,\beta>0$ omezený a na $(0,2]$ spojitý. Podle srovnávacího kritéria a odhadu

$$\left|\arctan^{\alpha} x\sin\frac{1}{x^\beta}\right| \le \pi^\alpha$$

integrál na tomto intervalu konverguje absolutně.

Z toho vyplývá, že integrál konverguje absolutně pro $\beta>1$, jinak diverguje.

[2]) neboť exponent $-3/2$ je menší než $-1$.

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \pi x}{x \ln^2 x}\, dx$

**Řešení:**

Integrand $f$ má spojité rozšíření do nuly, neboť

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 \pi x}{x \ln^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \pi \cdot \frac{\sin^2 \pi x}{\ln^2 x} = 1 \cdot \pi \cdot 0 = 0.$$

Integrand tedy můžeme považovat za funkci spojitou na $[0, +\infty)$. Z toho plyne, že

$$\int_0^2 f(x)\, dx$$

konverguje absolutně, neboť jde o spojitou (a tedy omezenou) funkci na uzavřeném omezeném intervalu. Nyní použijeme odhad

$$\int_2^{+\infty} |f(x)| \le \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$$

Protože integrál napravo konverguje, jak se můžeme přesvědčit přímým výpočtem pomocí substituce $t = \ln x$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

dostáváme, že vyšetřovaný integrál konverguje absolutně.

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{cotg}^a x}{\cos^b x} \ln \frac{2x}{\pi}\, dx$

**Řešení:**

Integrand nemění znaménko, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na malém pravém $\delta$-okolí nuly je

$$\cos x \approx 1, \quad \operatorname{cotg} x \approx \frac{1}{\sin x} \approx \frac{1}{x}$$

a tudíž podle limitního srovnávacího kritéria stačí na tomto okolí vyšetřovat konvergenci integrálu

$$\int_0^{\delta} \frac{\ln(2x/\pi)}{x^a}\, dx$$

Tento integrál konverguje absolutně pro $a < 1$ (jak plyne z tvaru $x^{(1-a)/2} \ln(2\pi/x) \cdot x^{-(1+a)/2}$, který lze v dostatečné blízkosti nuly odhadnout seshora druhým členem).

Na malém levém $\varepsilon$-okolí $\pi/2$ zase platí

$$\operatorname{cotg} x \approx \cos x = \sin(\pi/2 - x) \approx (\pi/2 - x), \qquad \ln\left(\frac{2x}{\pi}\right) \approx \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

odkud plyne podle limitního srovnávacího kritéria, že stačí vyšetřovat integrál

$$\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{a-b+1} dx$$

který substitucí $y = x - \pi/2$ převedeme na integrál

$$\int_0^{\varepsilon} y^{a-b+1}\, dy$$

který konverguje pro $a - b + 1 > -1$.

Závěr: integrál konverguje pro $1 > a > b-2$, a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos{}^{\alpha} x \, \sin^{\beta} \pi x}{x^{\gamma}(1-x)^{\gamma}}\, dx$

**Řešení:**

Na intervalu $(0, 1)$ je integrand spojitá omezená funkce, na jakémkoliv uzavřeném podintervalu tedy konverguje absolutně.

U nuly použijte odhady

$$\arccos x \approx \pi/2, \qquad 1 - x \approx 1, \qquad \sin(\pi x) \approx \pi x$$

a tudíž stačí vyšetřovat (neměnnost znaménka, limitní srovnávací kritérium)

$$\int_0^{\delta} x^{\beta-\gamma}\, dx$$

odkud máme podmínku $\beta > \gamma - 1$ (pro absolutní i neabsolutní konvergenci).

U jedničky použijte odhady

$$\sin(\pi x) = -\sin(\pi x - \pi) \approx -\pi(x-1) = \pi(1-x)$$

$$\arccos x \approx \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \approx \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x}$$

a proto stačí vyšetřovat integrál

$$\int_{1-\delta}^{1} (1-x)^{\beta+\alpha/2-\gamma}\, dx$$

odkud máme podmínku $\beta > \gamma - 1 - \alpha/2$ (pro absolutní i neabsolutní konvergenci).

Závěr: pro $\beta > \gamma - 1$ integrál konverguje, navíc absolutně. Jinak diverguje.

13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\operatorname{arccotg}{}^{\alpha} x^{\beta})\, dx$

**Řešení:**

Na okolí nuly má integrand spojité rozšíření, neboť

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2} \implies \lim_{x\to 0} \operatorname{arccotg}^{\alpha} x^{\beta} = (\operatorname{arccotg} 0)^{\alpha} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}$$

a funkce sinus je ve všech bodech spojitá.

Na okolí nekonečna platí, že integrand nemění znaménko a

$$\operatorname{arccotg} x \approx \frac{1}{x} \implies \operatorname{arccotg} x^{\beta} \frac{1}{x^{\beta}} \implies \operatorname{arccotg}^{\alpha} x^{\beta} \approx \frac{1}{x^{\alpha\beta}} \implies \sin(\operatorname{arccotg}^{\alpha} x^{\beta}) \approx \frac{1}{x^{\alpha\beta}}$$

odkud podle limitního srovnávacího kritéria vyplývá, že integrál konverguje tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha\beta > 1$ a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

14. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1} \arctan \frac{x}{x^3-1}\, dx$

**Řešení:**

U jedničky použijeme srovnání

$$\ln \frac{x^2-1}{x^2+1} = \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1} \approx \ln(x-1)$$

$$\frac{1}{x^a} \approx 1, \qquad \arctan \frac{x}{x^3-1} \approx \frac{\pi}{2}$$

Tudíž na okolí jedničky se integrand chová obdobně, jako $\ln y$ na pravém okolí nuly; přitom platí, že $\int_0^1 \ln y\, dy$ je absolutně konvergentní (lze ověřit přímým výpočtem integrací per partes).

Na okolí nekonečna platí, že

$$\ln \frac{x^2-1}{x^2+1} = \ln\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) \approx -\frac{2}{x^2+1} \approx -\frac{2}{x^2}$$

$$\arctan \frac{x}{x^3-1} \approx \arctan \frac{1}{x^2} \approx \frac{1}{x^2}$$

odkud vyplývá, že na okolí nekonečna se integrand chová přibližně jako funkce $\frac{1}{x^{a+4}}$. Protože na vhodném okolí nekonečna nemění znaménko, stačí vyšetřovat jeho absolutní konvergenci. Z výše uvedeného srovnání použitím limitní verze srovnávacího kritéria dostanene, že integrál konverguje pro $a + 4 > 1$, tedy pro $a > 3$.

15. $\displaystyle\int_0^1 \arccos^{a}(\sqrt{1-x^4}) \cos \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$

**Řešení:**

Uvědomme si nejprve, že je

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

a podle l'Hopitalova pravidla platí, že

$$\lim_{y\to 1-} \frac{\arccos y}{\sqrt{1-y^2}} = \lim_{y\to 1-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}{-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}} = 1$$

Odtud plyne, že na dostatečně malém pravém prstencovém okolí nuly je integrand nezáporný a jeho první člen se chová přibližně jako

$$\arccos{}^a(\sqrt{1-x^4}) \approx \left(\sqrt{1-(1-x^4)}\right)^a = x^{2a}$$

odkud pomocí limitního srovnávacího kritéria plyne, že integrál může konvergovat pouze pro $2a > -1$.

Uvědomme si dále, že na intervalu $(\delta, 1)$ pro $\delta > 0$ je integrand spojitá a omezená funkce, a tudíž $\int_\delta^1 f(x)\,dx$ konverguje absolutně.

Závěr: integrál konverguje pro $a > -1/2$ a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-(bx+cx^2)}\,dx$

**Řešení:**

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na okolí nuly je $e^{-bx-cx^2} \approx 1$ a tudíž

$$f(x) \approx x^a,$$

odkud podle limitního srovnávacího kritéria vyplývá, že integrand na vhodném pravém okolí nuly, např. $[0, 1]$, konverguje, právě když $a > -1$.

Na okolí nekonečna $[1, +\infty)$ rozlišíme následující případy:

1. $c > 0$. Potom integrál konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria srovnáním s integrálem $\int_1^{+\infty} e^{-(c/2)x^2}$. Platí totiž, že

$$\frac{x^a e^{-bx-cx^2}}{e^{-(c/2)x^2}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

a tudíž pro nějaké $x_a > 0$ musí platit, že pro $x > x_a$ je $x^a e^{-bx-cx^2} \leq e^{-(c/2)x^2} \leq e^{-(c/2)x}$. Poslední odhad plyne z toho, že pro $x > 1$ je $x^2 > x$ a funkce $e^{-y}$ je klesající v proměnné $y$. Konvergenci integrálu $\int_1^{+\infty} e^{-(c/2)x}\,dx$ lze snadno ověřit přímým výpočtem.

2. $c < 0$. Integrál diverguje podle srovnávacího kritéria srovnáním $f(x) \geq e^{-(c/2)x^2} \geq e^{-(c/2)x}$.

3. $c = 0$ a $b > 0$. Integrál konverguje srovnáním $x^a e^{-bx} \leq e^{-(b/2)x}$, která platí pro $x > x_b > 1$, kde $x_b$ je reálné číslo (které závisí na hodnotě konstanty $b$). Odhad se odvodí pomocí limity obdobně jako v bodě 1.

4. $c = 0$ a $b < 0$. Integrál diverguje srovnáním $x^a e^{-bx} \geq e^{-(b/2)x}$.

5. $c = 0$ a $b = 0$. Potom (připomeňme, že jsme na okolí nekonečna) integrál konverguje pro $a < -1$.

Závěr: porovnáním podmínky na okolí nuly ($a > -1$) a podmínek v bodech 1-5 dostaneme, že integrál konverguje pro $a > -1 \wedge c > 0$ nebo pro $a > -1 \wedge b > 0 \wedge c = 0$. Pak konverguje navíc absolutně. Jinak diverguje.