# Konvergence

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Teorie

**Věta 1.** Je-li funkce **spojitá** na **uzavřeném** intervalu $[a,b]$, pak $\int_a^b f$ konverguje.

**Věta 2.** Je-li funkce **spojitá** a **absolutně integrovatelná**, je již integrovatelná.

**Věta 3.** Nechť jsou funkce $f$ a $g$ **spojité** na $(a,b)$ a $\int_a^b g$ **konverguje**. Pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy když konverguje $\int_a^b (f+g)$.

**Věta 4** (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b)$. Nechť dále je $f$ spojitá na $[a,b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

**Věta 5** (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f, g$ jsou spojité nezáporné funkce na $[a,b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a,b)$.

**Věta 6** (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu 2)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f, g$ jsou **spojité** funkce na $[a,b)$ a nechť funkce $g$ je **kladná**.

1. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je **vlastní** a **nenulová**, pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a,b)$.
2. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je **vlastní** a $g \in \mathcal{N}(a,b)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ ($\int_a^b f$ konverguje dokonce absolutně).

## Příklady

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálů:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\,dx$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\frac{x}{x^2+1}\ln^a x\,dx$
5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^a}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^a}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arccotg} x}}\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan^{\alpha} x \sin\frac{1}{x^\beta}\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \pi x}{x\ln^2 x}\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{cotg}^{a} x}{\cos^b x}\ln\frac{2x}{\pi}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\arccos^{\alpha} x\,\sin^\beta \pi x}{x^\gamma(1-x)^\gamma}\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\operatorname{arccotg}^{\alpha} x^\beta)\,dx$

14. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\arctan\frac{x}{x^3-1}\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^{1} \arccos^{a}(\sqrt{1-x^4})\cos\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-(bx+cx^2)}\,dx$