Teorie míry

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Soustava S podmnožin nějaké množiny X se nazývá *σ-algebra*, jestliže obsahuje $\emptyset$ a je uzavřená na **doplňky** a **spočetná sjednocení**.

Definice 2. Zobrazení $\mu : S \to [0, \infty]$ na σ-algebře S se zve *míra*, jestliže

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$
   pro navzájem disjunktní množiny A_n.

Definice 3. Zobrazení $f : (X, S) \to (Y, M)$ se nazývá *měřitelné*, jestliže $f^{-1}(B) \in S$ pro každou $B \in M$.

Definice 4 (Konstrukce integrálu)**.** Nechť $D, D' \in S$ a $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Integrál $\int_D f d\mu$ vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme $D = D'$.

1. Je-li f **nezáporná** měřitelná funkce, definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \sup\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D\ , 0 \leq \alpha_j \leq f \text{ na } A_j, j = 1 \ldots m\}.$$

Součty vyskytující se v předchozím vzorci nazýváme dolními součty k funkci f . Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován vždy, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D, definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \int_D f^+ \mathrm{d}\mu + \int_D f^- \mathrm{d}\mu$$

pokud rozdíl výše má smysl. Pokud

$$\int_D f^+ = \int_D f^- = \infty$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná (přesně: S-měřitelná) funkce na $D' \neq D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \int_{D \cap D'} f \mathrm{d}\mu$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D. V některých případech je účelné používat podrobnější zápis Je-li integrál $\int_D f \mathrm{d}\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f \mathrm{d}\mu$ *konverguje* nebo že f *je integrovatelná*.

Věta 5 (Diskuse vztahu mezi Newtonem a Lebesguem)**.** Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b).

1. Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b, konverguje i Newtonův a to absolutně.
2. Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, konverguje i Lebesgueův.
3. Pokud konverguje jak Newtonův tak Lebesgueův, pak mají oba stejnou hodnotu.
4. Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.