na $\mathbb{C}$. ■

Poznamenejme, že funkce $\frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ se značí $\cosh z$. Pokud známe vyjádření funkce $\cosh z$ mocninnou řadou, vyřešíme předchozí příklad rychleji.

Užitečným nástrojem je věta o jednoznačnosti pro mocninné řady.

Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *jsou dvě mocninné řady, které pro všechna* z *z nějaké nekonečné kompaktní podmnožiny průniku jejich kruhů konvergence mají týž součet. Pak* $a_n = b_n$ *pro všechna* $n = 0, 1, 2, \dots$

P ř í k l a d Vyjádřete (na maximální množině) mocninou řadou o středu 0 funkci $\boxed{\frac{z}{1+z^3}}$

Řešení. Víme, že pro $|q| < 1$ platí $\frac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. Proto pro $|z| < 1$ platí $\frac{z}{1+z^3} = z \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-z^3)^n = \boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n+1}}$.

Tím jsme vyjádřili funkci ze zadání mocninnou řadou na kruhu $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Výsledná řada má poloměr konvergence 1 a na kružnici diverguje. Z uvedené věty o jednoznačnosti plyne, že nalezené vyjádření je jediné a zmíněný kruh je hledanou maximální množinou. ■

P ř í k l a d Vyjádřete (na maximálním intervalu) mocninou řadou o středu 0 funkci $\boxed{\sin^2 x.}$

Řešení. Je $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Přitom $\cos 2x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$ na $\mathbb{R}$, tedy

$$\boxed{\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}} \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

■

§97. Při sčítání mocninných řad někdy může pomoci skutečnost, že na kruhu konvergence konvergují absolutně, a tudíž je lze jakkoli přerovnat a uzávorkovat, aniž by se změnil součet.

P ř í k l a d Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^n$ všude, kde konverguje.

Řešení. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, je poloměr konvergence roven 1. Je-li $|z| = 1$, pak není splněna nutná podmínka konvergence z §40, a tedy řada diverguje. Proto řada konverguje, právě když $|z| < 1$. Pro taková z je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z^n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=k}^{\infty} z^n =$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}$. Uvědomte si, že jsme použili faktu, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |z^n| \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |nz^n|$ konverguje. ■

§**98.** Díky tomu, že mocninné řady konvergují lokálně stejnoměrně na kruhu konvergence, lze je **derivovat a integrovat člen po členu**, přičemž zderivovaná či zintegrovaná řada má stejný poloměr konvergence (poslední tvrzení snadno plynou ze vzorce pro výpočet poloměru konvergence). V těchto případech se obvykle omezujeme na tyto řady v reálném oboru, pak mluvíme o intervalu konvergence namísto kruhu konvergence. (Nicméně lze pracovat i v komplexním oboru, s použitím pojmu derivace podle komplexní proměnné a primitivní funkce k funkci komplexní proměnné.)

(i) *Nechť* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *na intervalu (kruhu) konvergence. Pak na této množině platí* $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$. *Navíc poloměr konvergence řady pro* f' *je roven poloměru konvergence řady pro* f.

(ii) *Nechť* $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *na intervalu (kruhu) konvergence. Pak na této množině platí* $f(z) = f(0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$. *Navíc poloměr konvergence řady pro* f *je roven poloměru konvergence řady pro* f'.

<u>Příklad</u> Na maximálním otevřeném intervalu vyjádřete funkci $\boxed{\operatorname{arctg} x}$ jako součet mocninné řady se středem 0.

Řešení. Jest $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Přitom

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

na $(-1,1)$. Protože $\operatorname{arctg} 0 = 0$, dostáváme

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

na $(-1,1)$. Interval $(-1,1)$ je maximální díky větě o jednoznačnosti zformulované v §96, protože je intervalem konvergence nalezené řady. ■

<u>Příklad</u> Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ na intervalu konvergence.

Řešení. Pro derivace funkce $f(x) = x^x$ v libovolném bodě $x_0 > 0$ postupně dostáváme

$$f'(x_0) = x_0^{x_0} \cdot \left(\ln x_0 + x_0 \cdot \frac{1}{x_0} \right) = x_0^{x_0} \cdot (\ln x_0 + 1),$$

$$f''(x_0) = x_0^{x_0} \cdot (\ln x_0 + 1) \cdot (\ln x_0 + 1) + x_0^{x_0} \cdot \frac{1}{x_0} = x_0^{x_0} \cdot \left[(\ln x_0 + 1)^2 + \frac{1}{x_0} \right],$$

$$f'''(x_0) = x_0^{x_0} \cdot (\ln x_0 + 1) \cdot \left[(\ln x_0 + 1)^2 + \frac{1}{x_0} \right] + x_0^{x_0} \cdot \left[\frac{2 \cdot (\ln x_0 + 1)}{x_0} - \frac{1}{x_0^2} \right] =$$
$$= x_0^{x_0} \cdot \left[(\ln x_0 + 1)^3 + \frac{3 \cdot (\ln x_0 + 1)}{x_0} - \frac{1}{x_0{}^2} \right].$$

Volbou $x_0 = 1$ obdržíme koeficienty Taylorovy řady

$$\frac{f'(1)}{1!} = 1, \quad \frac{f''(1)}{2!} = 1, \quad \frac{f'''(1)}{3!} = \frac{1}{2},$$

z nichž spolu s hodnotou $f(1) = 1$ sestavíme součet hledaných prvních čtyř členů:

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 =$$
$$= 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2}.$$

Příklad 2.19. Užitím základních rozvojů najděte Maclaurinovu řadu funkce $f(x) = e^{-x^2}$ a určete obor, ve kterém se součet této řady rovná funkci f.

Řešení. Položíme-li $t = -x^2$, dostaneme funkci $f(t) = e^t$, která má známý rozvoj do Maclaurinovy řady. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots.$$

Dosadíme-li za $t = -x^2$, kde $x \in \mathbb{R}$ je libovolné, dostáváme požadovanou Maclaurinovu řadu

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{-x^2}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \cdots =$$
$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!}.$$

Nalezená řada konverguje k hodnotě e^{-x^2} pro každé $x \in \mathbb{R}$.

dosazením $t = 3x$ dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\sin 3x = \frac{3x}{1!} - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots .$$

Oba dva rozvoje (první pro $t = x$) dosadíme do upraveného vyjádření funkce $\sin^3 x$:

$$\sin^3 x = \frac{1}{4} \cdot (3\sin x - \sin 3x) = \frac{1}{4} \cdot \Big[3 \cdot \Big(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \Big) -$$
$$- \Big(\frac{3x}{1!} - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \Big) \Big] =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \Big[\frac{3x}{1!} - \frac{3x^3}{3!} + \frac{3x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{3x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots -$$
$$- \frac{3x}{1!} + \frac{3^3x^3}{3!} - \frac{3^5x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \Big] =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \Big[\frac{3 \cdot (3^2 - 1)}{3!} \cdot x^3 - \frac{3 \cdot (3^4 - 1)}{5!} \cdot x^5 + \cdots -$$
$$- (-1)^{n+1} \cdot \frac{3 \cdot (3^{2n} - 1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} + \cdots \Big] = \frac{3}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3^{2n} - 1}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}.$$

Nalezená Maclaurinova řada má součet rovný $\sin^3 x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.22. Užitím základních rozvojů najděte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{x^{10}}{1-x}.$$

Řešení. Rozvoj funkce $\frac{1}{1-x}$ dostaneme ze základního vzorce pro součet geometrické řady s prvním členem 1 a kvocientem $q = x$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Tento rozvoj platí pro každé $x \in (-1, 1)$. Po vynásobení mocninou x^{10} dostaneme hledanou Maclaurinovu řadu

$$x^{10} \cdot \frac{1}{1-x} = x^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=10}^{\infty} x^n,$$

která konverguje k zadané funkci, právě když $x \in (-1, 1)$.

9.3 Taylorova a Maclaurinova řada

Příklad 9.3. Rozviňte následující funkce v Maclaurinovu řadu

$$\text{a)} f(x) = \cos x^2.$$

Řešení. Nejprve položíme $x^2 = t$. Dostáváme funkci $\cos t$, jejíž rozvoj je

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poté dosazením za $t = x^2$ dostáváme požadovanou Maclaurinovu řadu

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b)} f(x) = \arcsin x.$$

Řešení. Nejprve zadanou funkci zderivujeme. Platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Položíme-li $-x^2 = t$, dostaneme funkci $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$, jejíž rozvoj do binomické řady je

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} t + \binom{-\frac{1}{2}}{2} t^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} t^2 + \cdots$$

Dosazením za $t = -x^2$ dostáváme

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \cdots$$

a integrací dané řady máme

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \left(1-s^2\right)^{-\frac{1}{2}} ds = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} s^4 + \cdots\right) ds = \\ &= x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} + \cdots \end{aligned}$$

Uč 4/24T

$$\text{c)} f(x) = \frac{1}{3-2x}.$$

Řešení. Nejprve zadanou funkci upravíme

$$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}x} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{-1}.$$

Poté položíme $-\frac{2}{3}x = t$ a dostaneme funkci $\frac{1}{3}(1+t)^{-1}$. Její rozvoj do binomické řady je

$$\frac{1}{3}(1+t)^{-1} = \frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}t+\binom{-1}{2}t^2+\cdots+\binom{-1}{n}t^{+\cdot}\right] = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}t^n, \quad t \in (-1,1).$$

Po dosazení za $t = -\frac{2}{3}x$ získáme Maclaurinovu řadu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3-2x} &= \frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\binom{-1}{n}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n+\cdots\right] = \\
&= 1+(-1)\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\frac{(-1)^n n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n(-1)^n x^n+\cdots = \\
&= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 x^2+\cdots+\frac{n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n+\cdots\right] = \\
&= \underline{\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n.}
\end{aligned}$$

d) $f(x) = e^{\cos x}$.

Řešení. Provedeme rozvoje v Maclaurinovu řadu pro funkce e^x a $\cos x$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e\cdot e^{-\frac{x^2}{2!}}\cdot e^{\frac{x^4}{4!}}+\cdots = e\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2}{2!}+\cdots\right]\left[1+\frac{x^4}{4!}+\frac{\left(\frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!}+\cdots\right] = \\
&= e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^4}{24}+\frac{x^8}{2\cdot 24^2}+\cdots\right) = e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

e) $f(x) = e^x \sin x$.

Řešení. Maclaurinova řada pro funkci e^x (viz předchozí příklad) a $\sin x$ je

Kapitola 3

Užití mocninných řad

Mocninné řady se užívají při přibližných výpočtech hodnot elementárních funkcí, při výpočtech limit a integrálů a také při řešení diferenciálních rovnic. V rámci této práce nejprve na několika příkladech ukážeme přibližný výpočet hodnot přirozených logaritmů, dále ukázky výpočtu limit pomocí mocninných řad a nakonec se budeme zabývat řešením diferenciálních rovnic. Další ukázky použití je možné najít v [4], str. 76-84. Zadání příkladů jsem převzala ze skript [4] a [5].

3.1 Výpočet hodnot přirozených logaritmů

Pro výpočty přirozených logaritmů kladných čísel má základní Maclaurinova řada

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

tu nevýhodu, že konverguje pouze pro $x \in (-1,1\rangle$, takže umožňuje výpočet hodnoty $\ln a$ jen pro $a \in (0,2\rangle$. Po záměně x za $-x$ dostáváme rozvoj

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \qquad \text{pro } x \in \langle -1,1).$$

Odečtením obou řad dostaneme rozvoj

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\cdot\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \quad \text{kde } x \in (-1,1). \tag{3.1}$$

Právě tento rozvoj je k praktickému výpočtu logaritmů výhodnější, neboť má rychlejší konvergenci než rozvoj funkce $\ln(1+x)$. Ještě podstatnější výhoda však spočívá v tom, že nový rozvoj umožňuje přímý výpočet $\ln a$ pro každé $a > 0$, neboť oborem hodnot funkce

$$a = \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{kde } -1 < x < 1$$

je celý interval $(0,\infty)$. K zadanému $a > 0$ má příslušné $x \in (-1,1)$ jednoduché vyjádření

$$x = \frac{a-1}{a+1}$$

a po jeho dosazení do (3.1) dostaneme řadu k určení $\ln a$.

Řešení. Daná mocninná řada má střed v bodě $x_0 = 0$ a koeficienty $a_n = \dfrac{1}{4n-1}$.
Pro poloměr konvergence platí

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4n-1]{\frac{1}{4n-1}}} = 1.$$

Konvergenční interval dané řady je $(-1,1)$, řada diverguje jak pro $x=-1$, tak pro $x=1$.

Derivací mocninné řady „člen po členu“ podle věty 1.15 pro každé $x \in (-1,1)$ dostáváme

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2}.$$

Mocninnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{4n-2}$ sečteme jako geometrickou řadu s prvním členem x^2 a kvocientem x^4, kde $|x^4| < 1$. Dostaneme tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2} = x^2 + x^6 + \cdots + x^{4n-2} + \cdots = \frac{x^2}{1-x^4}.$$

Po dosazení do předchozího vztahu pro každé $x \in (-1,1)$ plyne

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2} = \frac{x^2}{1-x^4}.$$

Integrací podle věty 1.14 pro každé $x \in (-1,1)$ a při užití rozkladu na parciální zlomky obdržíme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1} &= \int_0^x \Big(\sum_{n=1}^{\infty} t^{4n-2}\Big)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}\mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\frac{\frac14}{1-t} + \frac{\frac14}{1+t} - \frac{\frac12}{1+t^2}\Big)\mathrm{d}t = \\
&= \frac14 \cdot \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t + \frac14 \cdot \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \frac12 \cdot \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \\
&= -\frac14 \cdot \ln(1-x) + \frac14 \cdot \ln(1+x) - \frac12 \operatorname{arctg} x = \\
&= \frac14 \cdot \ln\frac{1+x}{1-x} - \frac12 \cdot \operatorname{arctg} x.
\end{aligned}$$

Pro každé $x \in (-1,1)$ je součet zadané mocninné řady určen rovností

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1} = \frac14 \cdot \ln\frac{1+x}{1-x} - \frac12 \cdot \operatorname{arctg} x.$$

Poznámka 3.1. Budeme-li určovat přibližnou hodnotu pomocí prvních n členů příslušného rozvoje, budeme brát prvních n nenulových členů tohoto rozvoje, tedy například členy s mocninami $x, x^3, \dots, x^{2n+1}$ v rozvoji (3.1).

Příklad 3.1. Pomocí prvních 3 členů určete přibližnou hodnotu výrazu $\ln 2$.

Řešení. Podle předchozího výkladu zvolme $a = 2$ a položme

$$x = \frac{a-1}{a+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Dosadíme do rozvoje funkce $\ln\frac{1+x}{1-x}$ a vypočítáme přibližnou hodnotu

$$\ln 2 \doteq 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^5}{5}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^3 \cdot 3} + \frac{2}{3^5 \cdot 5} = \frac{2}{3} + \frac{2}{81} + \frac{2}{1215} \doteq 0{,}693.$$

Na závěr srovnejme vypočtenou hodnotu $\ln 2$ s výpočtem $\ln 2$ pomocí prvních tří členů rozvoje $\ln(1+x)$:

$$\ln 2 \doteq 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} \doteq \underline{\underline{0{,}833}}$$

a dodejme, že přesná hodnota $\ln 2$ má dekadický rozvoj $0{,}69314718\dots$.
Je patrné, že užitím rozvoje $\ln\frac{1+x}{1-x}$ jsme dostali přesnější výsledek již při součtu prvních tří členů, přičemž při použití rozvoje $\ln(1+x)$ bychom k určení stejně přesného výsledku potřebovali více než 1000 členů této řady, což je z praktického hlediska velmi nevýhodné.

Příklad 3.2. Pomocí prvních 6 členů určete přibližnou hodnotu výrazu $\ln 3$.

Řešení. Podle předchozího výkladu zvolme $a = 3$ a položme

$$x = \frac{a-1}{a+1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}.$$

Dosadíme do rozvoje funkce $\ln\frac{1+x}{1-x}$ a vypočítáme přibližnou hodnotu

$$\begin{aligned}\ln 3 &\doteq 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5} + \frac{(\frac{1}{2})^7}{7} + \frac{(\frac{1}{2})^9}{9} + \frac{(\frac{1}{2})^{11}}{11}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5} + \frac{1}{2^6 \cdot 7} + \frac{1}{2^8 \cdot 9} + \frac{1}{2^{10} \cdot 11} = \\ &= 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{80} + \frac{1}{448} + \frac{1}{2304} + \frac{1}{11264} \doteq 1{,}0986.\end{aligned}$$

Dodejme ještě, že přesná hodnota $\ln 3$ má dekadický rozvoj $1{,}09861228\dots$.

4.4. Užití mocninných řad

Nyní si ukážeme, jak pomocí mocninných řad můžeme např. určit přibližnou hodnotu výrazů, integrálů nebo vypočítat limity.

4.4.1. Určení přibližné hodnoty

Příklad 74. Pomocí prvních n nenulových členů Maclaurinova rozvoje určete přibližnou hodnotu výrazu

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \qquad n = 5.$$

Řešení:

Jelikož výraz $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ můžeme přepsat do tvaru $e^{-\frac{1}{3}}$, jde vlastně o funkční hodnotu funkce e^x v bodě $x = -\frac{1}{3}$.

Použijeme tedy Maclaurinovu řadu funkce e^x.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in (-\infty, \infty)\,.$$

Dosadíme $x = -\frac{1}{3}$. Obdržíme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = e^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{3}\right)^4 - \cdots .$$

Sečtením prvních pěti členů dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \doteq 0{,}7166.$$

Přibližná hodnota výrazu $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ pomocí prvních pěti nenulových členů je 0,7166. Pro porovnání je skutečná hodnota tohoto výrazu po zaokrouhlení 0,7165.

UKÁZAT

Příklad 3.6. Vyjádřete pomocí Maclaurinovy řady obecné řešení diferenciální rovnice

1

$$y'' + x \cdot y' + y = 0.$$

Řešení. Obecné řešení zadané diferenciální rovnice hledáme ve tvaru mocninné řady

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

Mocninnými řadami vyjádříme potřebné derivace této funkce

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots,$$
$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \cdots + n \cdot (n-1) a_n x^{n-2} + \cdots.$$

Dosazením těchto vztahů do zadané diferenciální rovnice dostáváme

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \cdots + n \cdot (n-1) a_n x^{n-2} + \cdots +$$
$$+ x \cdot \left[a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots\right] +$$
$$+ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots = 0.$$

Sečtením koeficientů u stejných mocnin x obdržíme

$$(2a_2 + a_0) + (3 \cdot 2a_3 + 2a_1) \cdot x + (4 \cdot 3a_4 + 3a_2) \cdot x^2 + \cdots +$$
$$+ [n \cdot (n-1) a_n + (n-1) a_{n-2}] \cdot x^{n-2} + \cdots = 0.$$

Mocninná řada na levé straně má mít součet rovný nule pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže se její koeficienty u všech mocnin x^k musí rovnat nule.

$$x^0: \quad 2a_2 + a_0 = 0, \quad \text{tudíž} \quad a_2 = -\frac{a_0}{2},$$
$$x^1: \quad 3 \cdot 2a_3 + 2a_1 = 0, \quad \text{tudíž} \quad a_3 = -\frac{a_1}{3},$$
$$x^2: \quad 4 \cdot 3a_4 + 3a_2 = 0, \quad \text{tudíž} \quad a_4 = -\frac{a_2}{4},$$
$$\vdots$$
$$x^{n-2}: \quad n \cdot (n-1) a_n + (n-1) a_{n-2} = 0, \quad \text{tudíž} \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n},$$
$$\vdots$$

Odtud je patrné, že určení koeficientů a_n závisí na volbě a_0 a a_1. Protože zadaná diferenciální rovnice je lineární, zjistíme, jak vypadají koeficienty a_n jednak pro dvojici $(a_0, a_1) = (a_0, 0)$, jednak pro dvojici $(a_0, a_1) = (0, a_1)$. Poté obecné řešení s dvojicí (a_0, a_1) zapíšeme jako součet řešení pro dvojice $(a_0, 0)$ a $(0, a_1)$.

1. Je-li $a_1 = 0$, pak $a_{2n+1} = 0$ pro každé n, a tak se v řadě budou vyskytovat pouze členy se sudými mocninami x. Pro $a_0 \in \mathbb{R}$ libovolné tedy dostáváme koeficienty
$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n} = \cdots = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{(2n)!!}.$$
Dosadíme-li všechny koeficienty do původní mocninné řady pro funkci y, získáme řešení rovnice
$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + \cdots = \\ &= a_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4\cdot 2}x^4 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

2. Je-li $a_0 = 0$, pak $a_{2n} = 0$ pro každé n, a tak se v řadě budou vyskytovat pouze členy s lichými mocninami x. Pro $a_1 \in \mathbb{R}$ libovolné tedy dostáváme koeficienty
$$a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{2n+1} = \cdots = (-1)^n \cdot \frac{a_1}{(2n+1)!!}.$$
Dosadíme-li všechny koeficienty do původní mocninné řady pro funkci y, získáme řešení rovnice
$$\begin{aligned} y_2 &= a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots = \\ &= a_1 \cdot \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 5}x^5 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je ve tvaru
$$\begin{aligned} y = a_0 &\cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4\cdot 2}x^4 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!!} + \cdots\right) + \\ + a_1 &\cdot \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 5}x^5 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} + \cdots\right). \end{aligned}$$
Dodejme, že libovolná čísla a_0 a a_1, která konkrétní řešení dané rovnice určují, mají význam počátečních podmínek $y(0) = a_0$ a $y'(0) = a_1$.

Příklad 3.7. Vyjádřete pomocí Maclaurinovy řady obecné řešení diferenciální rovnice
$$y'' + k \cdot x^2 \cdot y = 0, \quad \text{kde } k \in \mathbb{R} \text{ je daná konstanta.}$$

Řešení. Obecné řešení zadané diferenciální rovnice hledáme ve tvaru mocninné řady
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots.$$
Mocninnými řadami vyjádříme potřebné derivace této funkce
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$

Dosadíme-li všechny koeficienty do původní mocninné řady pro funkci y, získáme řešení rovnice

$$y_1 = a_0 \cdot \left(1 - \frac{k}{3\cdot 4}x^4 + \frac{k^2}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}x^8 + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot k^n}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdots(4n-1)\cdot 4n} + \cdots\right).$$

2. V případě $a_0 = 0$ dostáváme předně $a_4 = a_8 = \cdots = 0$, a dále

$$a_5 = -\frac{ka_1}{4\cdot 5},$$

$$a_9 = -\frac{ka_5}{8\cdot 9} = -\frac{k\cdot\left(\frac{-ka_1}{4\cdot 5}\right)}{8\cdot 9} = \frac{k^2 a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9},$$

$$\vdots$$

$$a_{4n+1} = \frac{(-1)^n \cdot k^n a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdots 4n\cdot(4n+1)},$$

$$\vdots$$

Dosadíme-li všechny koeficienty do původní mocninné řady pro funkci y, získáme řešení rovnice

$$y_2 = a_1 \cdot \left(x - \frac{k}{4\cdot 5}x^5 + \frac{k^2}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot k^n}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdots 4n\cdot(4n+1)} + \cdots\right).$$

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je ve tvaru

$$y = a_0 \cdot \left(1 - \frac{k}{3\cdot 4}x^4 + \frac{k^2}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}x^8 + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot k^n}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdots(4n-1)\cdot 4n} + \cdots\right) +$$
$$+ a_1 \cdot \left(x - \frac{k}{4\cdot 5}x^5 + \frac{k^2}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot k^n}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdots 4n\cdot(4n+1)} + \cdots\right),$$

kde $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Dodejme, že libovolná čísla a_0 a a_1, která konkrétní řešení dané rovnice určují, mají význam počátečních podmínek $y(0) = a_0$ a $y'(0) = a_1$.

2

Příklad 3.8. Určete prvních sedm nenulových členů Maclaurinovy řady pro řešení počátečního problému

$$y'' = \mathrm{e}^x \cdot y, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Řešení. Řešení zadané diferenciální rovnice splňující počáteční podmínky hledáme ve tvaru mocninné řady

$$y = 2 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots .$$

Mocninnými řadami vyjádříme potřebné derivace této funkce

$$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots ,$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + n\cdot(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots .$$

Dosazením těchto vztahů, spolu s Maclaurinovým rozvojem funkce e^x pro každé $x \in \mathbb{R}$, do zadané diferenciální rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} &2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + n\cdot(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots = \\ &\quad = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)\cdot\left(2 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right). \end{aligned}$$

Po roznásobení mocninných řad ve druhém řádku porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně, obdržíme

$$\begin{aligned} x^0:&\quad 2a_2 = 1\cdot 2, \\ x^1:&\quad 3\cdot 2a_3 = 1\cdot 1 + \frac{1}{1!}\cdot 2, \\ x^2:&\quad 4\cdot 3a_4 = 1\cdot a_2 + \frac{1}{1!}\cdot 1 + \frac{1}{2!}\cdot 2, \\ x^3:&\quad 5\cdot 4a_5 = 1\cdot a_3 + \frac{1}{1!}\cdot a_2 + \frac{1}{2!}\cdot 1 + \frac{1}{3!}\cdot 2, \\ x^4:&\quad 6\cdot 5a_6 = 1\cdot a_4 + \frac{1}{1!}\cdot a_3 + \frac{1}{2!}\cdot a_2 + \frac{1}{3!}\cdot 1 + \frac{1}{4!}\cdot 2, \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Po úpravě pravých stran dostaneme

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 2, \\ 6a_3 &= 3, \\ 12a_4 &= a_2 + 2, \\ 20a_5 &= a_3 + a_2 + \frac{5}{6}, \\ 30a_6 &= a_4 + a_3 + \frac{a_2}{2} + \frac{1}{4}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

a pak postupně vypočítáme koeficienty

$$a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{7}{60}, \quad a_6 = \frac{1}{20}, \quad \ldots$$

Dosadíme-li všechny koeficienty do původní mocninné řady pro funkci y, obdržíme hledaný „počátek“ Maclaurinovy řady

$$y = 2 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5 + \frac{1}{20}x^6 + \cdots .$$

3

Příklad 3.9. Určete prvních pět nenulových členů Maclaurinovy řady pro řešení počátečního problému

$$y'' - x - y \cdot \cos x = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

a_0 a_1

Řešení. Řešení zadané diferenciální rovnice splňující počáteční podmínky hledáme ve tvaru mocninné řady

$$y = 1 + 0x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots .$$

Mocninnými řadami vyjádříme potřebné derivace této funkce

$$y' = 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots ,$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots + n \cdot (n-1)a_nx^{n-2} + \cdots .$$

Dosazením těchto vztahů, spolu s Maclaurinovým rozvojem funkce $\cos x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, do zadané diferenciální rovnice upravené do tvaru $y'' = x + y \cdot \cos x$ dostáváme

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots + n \cdot (n-1)a_nx^{n-2} + \cdots = x +$$
$$+ \left(1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right).$$

Po roznásobení mocninných řad ve druhém řádku porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně, obdržíme

$$\begin{aligned}
x^0 &: \quad 2a_2 = 1 \cdot 1, \\
x^1 &: \quad 3 \cdot 2a_3 = 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1, \\
x^2 &: \quad 4 \cdot 3a_4 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2!}\right) + 0 \cdot 0 + a_2 \cdot 1, \\
x^3 &: \quad 5 \cdot 4a_5 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2!}\right) + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 \\
x^4 &: \quad 6 \cdot 5a_6 = 1 \cdot \frac{1}{4!} + 0 \cdot 0 + a_2 \cdot \left(-\frac{1}{2!}\right) + a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 1, \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Po úpravě pravých stran dostaneme

$$\begin{aligned}
2a_2 &= 1, \\
6a_3 &= 1, \\
12a_4 &= -\frac{1}{2} + a_2, \\
20a_5 &= a_3,
\end{aligned}$$

$$30a_6 = \frac{1}{24} - \frac{a_2}{2} + a_4,$$

$$\vdots$$

a pak postupně vypočítáme koeficienty

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{6 \cdot 20}, \quad a_6 = -\frac{1}{24 \cdot 6}, \quad \dots$$

Dosadíme-li všechny koeficienty do původní mocninné řady pro funkci y, obdržíme hledaný „počátek“ Maclaurinovy řady

$$\underline{y = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{144}x^6 + \cdots.}$$

Předchozí příklady 3.6 – 3.9 jsme řešili stejným postupem, při kterém jsme do diferenciální rovnice dosazovali mocninné řady pro hledané řešení y a jeho derivace. V následujících příkladech 3.10 – 3.13 při řešeních počátečních problémů s daným bodem $x_0 \in \mathbb{R}$ zvolíme jiný postup, při kterém budeme zadanou diferenciální rovnici opakovaně derivovat, abychom vyjádřili derivace všech řádů hledané funkce y a pak postupně získali jejich hodnoty v bodě x_0 po úvodním dosazení počátečních hodnot. Teprve nakonec zapíšeme Taylorovu řadu hledaného řešení

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \cdots$$

s vypočtenými hodnotami $y^{(k)}(x_0)$.

Příklad 3.10. Metodou postupného derivování určete Maclaurinovu řadu pro řešení počátečního problému

$$y'' - x \cdot y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Řešení. Opakovaným derivováním zadané diferenciální rovnice upravené do tvaru $y'' = x \cdot y' + 2y$ v libovolném bodě $x \in \mathbb{R}$ postupně dostáváme

$$y''' = y' + xy'' + 2y' = 3y' + xy'',$$

$$y^{(4)} = 3y'' + y'' + xy''' = 4y'' + xy''',$$

$$y^{(5)} = 4y''' + y''' + xy^{(4)} = 5y''' + xy^{(4)},$$

$$y^{(6)} = 5y^{(4)} + y^{(4)} + xy^{(5)} = 6y^{(4)} + xy^{(5)},$$

$$\vdots$$

Protože řada $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{|x|}{k}\right)^{n-1}$ podle podílového kritéria konverguje, ze srovnávacího kritéria pro řady s nezápornými členy plyne absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$. Proto platí nerovnost $r' \geq r$.

Dohromady tedy získáváme $r = r'$, což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 1.11. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ je opět mocninná řada a má tedy v konvergenčním intervalu $(-r, r)$ derivaci. Derivací je opět mocninná řada s týmž poloměrem konvergence. Budeme-li postupovat v této úvaze dále, můžeme tvrzení zobecnit následující větou.

Věta 1.16. *Součet $s(x)$ mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ je funkce, která má v konvergenčním intervalu $(-r, r)$ derivaci libovolného řádu. Je-li k přirozené číslo, pak pro každé $x \in (-r, r)$ platí*

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} k! \cdot \binom{n}{k} \cdot a_n \cdot x^{n-k}.$$

Důkaz. Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n$ se derivováním „člen po členu" nemění. Tedy po prvním derivováním dostáváme

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1},$$

po druhém derivování

$$s''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}, \quad \cdots$$

až $k-$ tá derivace je tvaru

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot a_n \cdot x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} k! \cdot \binom{n}{k} \cdot a_n \cdot x^{n-k},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 1.12. Mají-li dvě mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ tentýž poloměr konvergence r a stejný součet $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ na intervalu $(-r, r)$, platí $a_n = b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
Důkaz vyplývá z předchozí věty o existenci a vyjádření derivací funkce $s(x)$, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!} = b_n.$$

Definice 1.8. Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

nazýváme Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0. Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o Maclaurinově řadě, která je tedy tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$.

Následující dvě věty udávají podmínky, kdy platí rovnost hodnot součtu Taylorovy řady funkce f v bodě x_0 s hodnotami téže funkce f. První věta tuto vlastnost pouze převádí do řeči Taylorových zbytků, zatímco skutečný praktický význam má dostatečná podmínka z druhé věty.

Věta 1.19. *Nechť funkce f má v nějakém bodě x_0 derivace všech řádů. Pak platí*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

na daném intervalu I obsahujícím bod x_0 právě tehdy, když pro posloupnost $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ Taylorových zbytků z věty 1.18 platí

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \textit{pro všechna} \quad x \in I.$$

Důkaz. Na intervalu I platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n,$$

právě tehdy, když posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů uvedené mocninné řady splňuje rovnost $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$. Avšak

$$s_n(x) = T_n(x) = f(x) - R_n(x),$$

proto je uvedená podmínka ekvivalentní s rovností $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ na intervalu I. □

Věta 1.20. *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I derivace všech řádů a nechť posloupnost $\{f^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ je stejnoměrně ohraničená na intervalu I. Pak Taylorova řada funkce f v libovolném bodě $x_0 \in I$ konverguje na I k f, tj. platí*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n \quad \textit{pro každé} \quad x \in I.$$

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že $| f^{(n)}(x) | \leq k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in I$. Podle Taylorovy věty je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad \text{odkud} \quad | R_n(x) | \leq \frac{k}{(n+1)!} \cdot | x - x_0 |^{n+1}.$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{k}{(n+1)!} \cdot | x - x_0 |^{n+1}$ konverguje pro každé $x \in I$ (plyne to z podílového kritéria). Podle nutné podmínky konvergence máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{(n+1)!} \cdot | x - x_0 |^{n+1} = 0, \quad \text{tudíž} \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{pro každé } x \in I$$

a dokazované tvrzení plyne z věty 1.20. □

Nyní uvedeme pouze znění věty o jednoznačnosti Taylorovy řady. Její důkaz lze nalézt v [7], str. 101.

Věta 1.21. *Je-li možno funkci f na nějakém otevřeném intervalu I, jehož vnitřním bodem je x_0, rozvést do mocninné řady o středu x_0, pak je takový rozvoj pouze jediný a je současně Taylorovou řadou funkce f se středem x_0.*

Poznámka 1.14. Obrácené tvrzení k větě 1.21 neplatí; stejná mocninná řada může být Taylorovou řadou dvou různých funkcí.

Příklady Maclaurinovy řady elementárních funkcí:

- pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Funkce $f(x) = e^x$ má derivaci libovolného řádu pro $x \in \mathbb{R}$. Derivace n-tého řádu je dána vzorcem $f^{(n)}(x) = e^x$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Je-li $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, pak $|e^x| \leq e^r$ na intervalu $\langle -r, r \rangle$. Podle věty 1.20 řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje k e^x na intervalu $\langle -r, r \rangle$ a $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

- pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Funkce $f(x) = \sin x$ má derivaci libovolného řádu pro $x \in \mathbb{R}$. Derivace n–tého řádu je dána vzorcem $f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí $| \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) | \leq 1$. Uvedené tvrzení pak plyne z věty 1.20.