13. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Poloměr mocninné řady)**.** Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ existuje číslo $\rho \in [0,\infty]$ takové, že řada konverguje na množině $\{x, |x-x_0| < \rho\}$ a diverguje na $\{x, |x-x_0| > \rho\}$ (pro $x = x_0 + \rho$ a $x = x_0 - \rho$ nevíme nic). Platí:

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

což se rovná

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}} = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

pokud limity existují.

Číslo ρ se nazývá *poloměr konvergence* dané mocninné řady.

Věta 2. Je-li $q \in (0,\rho)$, pak řada konverguje stejnoměrně a absolutně na $\{x, |x-x_0| \leq q\}$.

Součtem mocninné řady je funkce spojitá na $\{x, |x-x_0| < \rho\}$.

Věta 3. Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence ρ má součet $f(x)$. Pak na $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

a

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Obě mají poloměr konvergence ρ.

Věta 4 (Abelova věta)**.** Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence. Pak tato mocninná řada konverguje v $x_0+\rho \Leftrightarrow$ tato mocninná řada konverguje na $[x_0, x_0+\rho]$ stejnoměrně.

V takovém případě

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = \lim_{x \to x_0+\rho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Příklady

1. Derivováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

(a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

(b) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

2. Integrováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

   (a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

   (b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

   (c) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

3. Najděte součet následujících řad.

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

   (c) VZOR: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

   (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

4. Rozviňte do řady funkci

   (a)
   $$f(x) = \frac{x}{1+x^3}$$

   (b)
   $$f(x) = \sin^2 x$$
   Návod: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

   (c)
   $$f(x) = \arctan x$$
   Návod: zderivuj

   (d)
   $$f(x) = e^{-x^2}$$

   (e)
   $$f(x) = \frac{x^{10}}{1-x}$$

   (f)
   $$f(x) = \frac{1}{3-2x}$$

5. Přibližné hodnoty

   (a)
   $$\ln 2$$
   Užijte: $\ln \frac{1+x}{1-x}$

   (b)
   $$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

6. Diferenciální rovnice:

   (a)
   $$y'' + xy' + y = 0$$

   (b) Určete prvních 7 koeficientů u řešení
   $$y'' = e^x y, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

   (c) Určete prvních 5 nenulových koeficientů u řešení
   $$y'' - x - y\cos x = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

1. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n})$
3. $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
4. $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + o(x^n)$
5. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$
6. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
7. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$
8. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
9. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
10. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
11. $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$