Příklad 20.8. Máme-li např. funkci $f(x) := x$ rozvést ve Fourierovu řadu v intervalu $(1, 3)$, bude mít součet s_f této řady periodu $q = 2$ a v intervalu $\langle 1, 3\rangle$ bude definován podmínkami

$$(60)\qquad s_f(x) = x \text{ pro } x \in (1,3), \quad s_f(x) = \tfrac{1}{2}(f(1) + f(3)) = 2 \text{ pro } x \in \{1,3\}.$$

Snadno zjistíme, že

$$(61')\qquad a_0 = 4, \ a_k = 0, \ b_k = (-1)^{k-1}\frac{2}{k\pi} \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N},$$

takže je

$$(61'')\qquad s_f(x) = 2 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin k\pi x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R};$$

řada vpravo přitom konverguje v každém intervalu $(2k - 1, 2k + 1)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, lokálně stejnoměrně a konvergence je nestejnoměrná v každém levém i v každém pravém prstencovém okolí každého lichého čísla (sr. s (31)).

Cvičení

Kromě konkrétní úlohy uvedené v každém z následujících cvičení najděte vždy a) funkci $s_f(x)$, tj. součet příslušné Fourierovy řady v $\mathbb{R}$, b) všechny maximální otevřené intervaly, v nichž daná řada konverguje lokálně stejnoměrně, c) všechny body, v jejichž žádném okolí není konvergence stejnoměrná. (Sr. s Po. 20.4.)

20.08°. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := x$ v intervalu $(\alpha, \alpha + 2\pi)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

20.09°. Dokažte, že

$$(62)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \tfrac{1}{4}\pi \operatorname{sgn} x \quad \text{v intervalu } (-\pi, \pi),$$

a odvoďte z toho, že

$$(63)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

20.10°. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := |\sin x|$ v intervalu $(-\pi, \pi)$ a pomocí ní dokažte, že

$$(64)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \tfrac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} = \tfrac{1}{4}(\pi - 2);$$

uvažte, že první z těchto řad lze snadno sečíst i bez užití Fourierových řad.

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady π-periodické funkce, která se rovná funkci $\cos x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Řešení. Povšimněme si, že hodnoty funkce v bodech $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nejsou popisem určeny jednoznačně. Nicméně ze zadání snadno plyne, že funkce je v $\mathcal{P}(\pi)$ a že je po částech hladká.

Zadání odpovídá hodnota $l = \frac{\pi}{2}$ z definice Fourierových koeficientů a Fourierovy řady. Všimněme si, že Fourierovy koeficienty a řada zadané funkce budou splývat s koeficienty a řadou funkce $|\cos x|$. To je sudá funkce, a proto tentokrát budou nulové koeficienty b_n. Počítejme

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos\left(nx\frac{\pi}{(\frac{\pi}{2})}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\cos((2n+1)x) + \cos((2n-1)x)\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right).
\end{aligned}
$$

Fourierovou řadou všech funkcí odpovídajících zadání je tedy

$$
\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx.
$$

Protože funkce $|\cos x|$ je po částech hladká a spojitá, konverguje tato řada stejnoměrně k funkci $|\cos x|$.

Povšimněme si navíc, že jde zároveň o trigonometrickou řadu 2π-periodické funkce $|\cos x|$. Z výše řečeného je zřejmé, že nalezená řada je zároveň Fourierovou řadou zadané funkce uvažované jako funkce z $\mathcal{P}(2\pi)$. To je tzv. kosinová řada sudé 2π-periodické funkce. ■

P ř í k l a d Uvažujte 1-periodickou funkci, která je rovna x^2 na intervalu $(0, 1)$. Zjistěte, co říká příslušná Parsevalova rovnost pro tuto funkci.

Řešení. Jde o funkci, jejíž čtverec je integrovatelný na intervalu $(0, 1)$. (Navíc jde o po částech hladkou funkci a mohli bychom tedy též studovat, k čemu konverguje příslušná Fourierova řada jako v předchozích příkladech.) Počítejme její Fourierovy koeficienty:

$a_0 = 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$,

$a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2 n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$ (proveďte si podrobně a všimněte si, proč jsme počítali a_0 zvlášť),

$b_n = 2\int_0^1 x^2 \sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi n}$.

Parsevalova rovnost nám tedy říká, že

$$2\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi^4 n^4} + \frac{1}{\pi^2 n^2}\right).$$

Spočteme-li integrál a užijeme-li rovnost $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, kterou jsme odvodili výše, dostáváme $\frac{2}{5} = \frac{2}{9} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^4 n^4} + \frac{1}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}$, a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

■

Už jsme si zdůraznili to, že aplikací Parsevalovy rovnosti můžeme dostat informaci o součtu číselné řady, která je zajímavá, případně pro nás nová. Totéž lze ovšem říci mnohdy i o součtu Fourierovy řady samotné, jak uvidíme v následujících dvou příkladech.

Příklad Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady funkce $|x|$ na intervalu $(-1, 1)$. (Přesněji: Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady nějaké 2-periodické funkce, která má dané zúžení na $(-1, 1)$.) Co dává výsledek pro bod $x = 0$?

Řešení. Definujme funkci f na celém $\mathbb{R}$ tak, aby splňovala podmínky zadání, byla 2-periodická a navíc pro pohodlí tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}$. Taková funkce je jediná a $f(1 + 2k) = 1$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Tato funkce je navíc po částech hladká. Proto její Fourierova řada konverguje k f stejnoměrně.

Díky sudosti zadané funkce vidíme bez výpočtu, že $b_n = 0$. Snadno spočteme, že $a_0 = 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1$ a $a_n = 2\int_0^1 x\cos(nx\pi)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)$.

Hledanou Fourierovou řadou je $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(nx\pi)$ a ta konverguje stejnoměrně k f na $\mathbb{R}$.

Dosadíme-li $x = 0$, dostaneme $0 = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}$, a tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(Povšimněte si, že poslední rovnost lze odvodit též ze znalosti součtu řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.) ■

4c

Příklad Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady 2π-periodické funkce f, která je rovna $\operatorname{sgn} x$ na intervalu $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a nule na zbytku intervalu $[-\pi, \pi]$. Napište, co výsledek říká pro $x = \frac{\pi}{2}$.

Řešení. Výpočtem zjistíme, že Fourierovou řadou je $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1 - \cos\frac{\pi n}{2})\sin nx}$ Protože zadaná funkce je po částech hladká, konverguje její Fourierova řada v bodě $\frac{\pi}{2}$

4. [7b] Mějme $f(x) = |x|(1 - |x|)$ na $(-1, 1)$ a dále periodicky s periodou 2.

1. Rozviňte tuto funkci do 2-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
2. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá, tedy $b_n = 0$, dále vidíme, že na intervalu $(0, 1)$ se rovná funkci $x(1-x) = x - x^2$. Protože perioda $\ell = 2$, je koeficient před integrálem $\frac{2}{\ell} = \frac{2}{2} = 1$, díky sudosti však můžeme také brát dvojnásobek integrálu přes poloviční periodu, tedy:

$$a_0 = 2\int_0^1 x - x^2\,dx = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

případně s onou dvojkou zacházet takto:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{2} &= \int_0^1 (x - x^2)\cos\pi nx\,dx = \int_0^1 x\cos\pi nx\,dx - \int_0^1 x^2\cos\pi nx\,dx = \\
&= \left[\frac{1}{\pi n}x\sin\pi nx\right]_0^1 - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \sin\pi nx\,dx - \left[\frac{1}{\pi n}x^2\sin\pi nx\right]_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\sin\pi nx\,dx = \\
&= \left[\frac{1}{(\pi n)^2}\cos\pi nx\right]_0^1 + \frac{2}{\pi n}\left(\left[-\frac{1}{\pi n}x\cos\pi nx\right]_0^1 + \frac{1}{(\pi n)^2}\left[\sin\pi nx\right]_0^1\right) = \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi^2 n^2}(-1)^n = -\frac{(-1)^n + 1}{\pi^2 n^2},
\end{aligned}$$

tedy

$$a_n = -\frac{2\Big((-1)^n + 1\Big)}{\pi^2 n^2}.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n + 1}{n^2}\cos\pi nx,$$

a protože zadaná funkce po částech C^1 s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Parsevalova rovnost (v našem případě $2\int_0^1 |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$) dává:

$$2\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = \frac{1}{18} + \frac{4}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n + 1)^2}{n^4},$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Big((-1)^n + 1\Big)^2}{n^4} = \frac{\pi^4}{360}.$$

4. [7b] Mějme $f(x) = \cos 3x$ na $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \rangle$, $f(x) = 0$ na $\langle -\pi, -\frac{\pi}{6} \rangle$ a $\langle \frac{\pi}{6}, \pi \rangle$ a dále periodicky s periodou 2π.
   1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   2. Napište Parsevalovu rovnost a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá, tedy:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx = \left[\frac{2}{3\pi} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3\pi},$$

a dále

$$\pi a_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \cos nx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos(3+n)x + \cos(3-n)x \big) \, dx .$$

Je vidět, že výpočet bude vypadat jinak pro $n = 3$ a jinak pro $n \neq 3$. Pro $n = 3$ máme

$$\pi a_3 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos 6x + 1 \big) \, dx = \frac{1}{6} \Big[\sin 6x \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

zatímco pro $n \neq 3$ je

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \frac{1}{3+n} \Big[\sin(3+n)x \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3-n} \Big[\sin(3-n)x \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \\ &= \frac{1}{3+n} \sin(3+n)\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3-n} \sin(3-n)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3+n} \cos n\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3-n} \cos n\frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{6}{\pi(9-n^2)} \cos n\frac{\pi}{6} . \end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6} \cos nx}{9 - n^2},$$

a protože zadaná funkce je po částech C^1 s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3x \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$) dává:

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{9\pi^2} + \frac{1}{36} + \frac{36}{\pi^2} \sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2},$$

případně:

$$\sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2} = \frac{5\pi^2}{1296} - \frac{1}{162} .$$

b) Viz obr. 9. Speciálně pro $x = \frac{L}{2}$

$$\frac{L^2}{4} = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin[(2k-1)\frac{\pi}{2}],$$

odkud

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

c) Funkce f má spojitou první derivaci na $\mathbb{R}$, druhá derivace je spojitá na $\mathbb{R}$ s výjimkou celých násobků $2L$, v nichž má skoky. Navíc, druhá derivace je po částech hladká na $[-L, L]$.

PŘÍKLAD 2.15.13.
Nechť f označuje $2L$–periodickou funkci definovanou v intervalu $(-L, L]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x(L-x), & x \in [0, L], \\ f(-x), & x \in (-L, 0). \end{cases}$$

a) Zapište Fourierovu řadu funkce f. Návod. Využijte skutečnosti, že funkce je L–periodická.

b) Nakreslete graf součtu řady v intervalu $J = [-2L, 2L]$. Odvoďte vzorec

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

c) Zdůvodněte, proč Fourierovy koeficienty klesají k nule rychlostí $1/k^2$.

Výsledky:

a) Funkce f je sudá a L–periodická, tedy řada je kosinová s $b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$ a

$$a_0 = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} x(L-x)\, dx = \frac{L^2}{3},$$

$$a_k = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} x(L-x) \cos \frac{2k\pi x}{L}\, dx = -\frac{L^2}{k^2\pi^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Fourierova řada má tvar

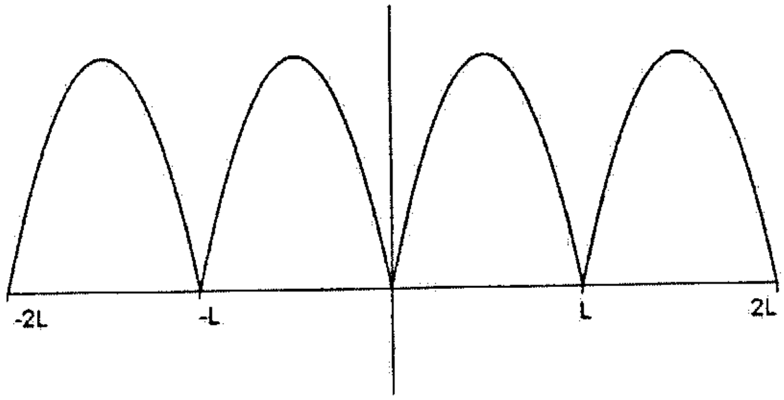
$$\frac{L^2}{6} - \frac{L^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos \frac{2k\pi x}{L}.$$

b) Viz obr. 29.

c) Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$, první derivace je spojitá na $\mathbb{R}$ s výjimkou celých násobků L, v nichž má skoky. Navíc, první derivace je po částech hladká na $[-L, L]$.

PŘÍKLAD 2.15.14.
Vztah (2.7.4) z Příkladu 2.7.3 říká, že pro všechna $x \in (0, 2\pi)$ platí

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$



Obr. 29.

Integrací člen po členu od 0 do x odvoďte, že pro $x \in [0, 2\pi]$ platí

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Další integrací člen po členu odvoďte, že pro $x \in (0, 2\pi)$ platí

$$\frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3},$$

$$\frac{-x^4}{48} + \frac{\pi x^3}{12} - \frac{\pi^2 x^2}{12} + \frac{\pi^4}{90} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^4}.$$

Návod. Použijte výsledku z odst. 2.12. Pro součet $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ užijte výsledku z Příkladu 2.15.11 (nebo Příkladu 2.15.13) nebo vypočítejte integrál

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx.$$

Příklad 2.15.15. *(Dvoucestně usměrněný sinusový kmit.)*
a) Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = |\sin x|$. (Alternativní zadání: najděte Fourierovu kosinovou řadu 2π-periodické funkce f, pro níž $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ – viz obr. 30.)
Návod. Využijte toho, že $|\sin x|$ je π-periodická funkce (a volte $2L = \pi$). K výpočtu integrálů $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2kx \, dx$ použijte vzorec $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Zapište součet prvních čtyř nenulových členů Fourierovy řady.

c) Nakreslete graf součtu řady pro $-\pi \leq x \leq \pi$. Součet řady pro $x = 0$ použijte ke stanovení součtu číselné řady

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots.$$

Příklad 3 Řešme nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' + 9y = f(x),$$

kde $f(x)$ je periodickým prodloužením $f^*(x) = \max\{\sin x, 0; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$. Nejprve určíme rozvoj funkce f^* do Fourierovy řady. Nejedná se zde o funkci sudou ani lichou, musíme tedy spočítat koeficienty a_k i b_k. Protože v intervalu $\langle \pi, 2\pi \rangle$ je funkce rovna nule, tedy i její integrál na tomto intervalu je roven nule, stačí počítat Fourierovy koeficienty jen na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Nejprve určíme koeficient a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

Dále počítáme koeficienty a_k

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos kx \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\sin(k+1)x - \sin(k-1)x)\mathrm{d}x.$$

Pro koeficienty $k \neq 1$ dále

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^k+1}{k+1} - \frac{(-1)^k+1}{k-1}\right] = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^k+1}{k^2-1}\right].$$

Tedy pro

k-liché a $k \neq 1$ $a_k = 0$

k-sudé $\quad a_k = -\frac{2}{\pi(k^2-1)}$.

Nyní provedeme zvlášť výpočet pro a_1

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\sin^2 x\right] = 0.$$

Dále určíme koeficienty b_k

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin kx \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [-\cos(k+1)x + \cos(k-1)x]\mathrm{d}x.$$

Opět provedeme výpočet nejprve pro $k \neq 1$

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\sin(k+1)x}{k+1} + \frac{\sin(k-1)x}{k-1}\right]_0^\pi = 0.$$

Dopočítáme ještě koeficient b_1

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}.$$

Koeficienty jsme tedy určili takto

$$a_{2k} = \frac{-2}{\pi(k^2-1)}, \qquad a_{2k+1} = 0, \qquad b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_l = 0, \qquad k = 0, 1, 2 \ldots, \quad l = 2, 3 \ldots$$

Rozvoj funkce f^* do Fourierovy řady je tedy

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi(k^2-1)} \cos 2kx.$$

Nyní můžeme začít řešit ODR2. Předpokládáme řešení ve tvaru

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

Abychom mohli předpokládané řešení dosadit do zadání, musíme si ještě vyjádřit druhou derivaci funkce y

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty}(-k^2 A_k \cos kx - k^2 B_k \sin kx).$$

Dosadíme tedy do zadané rovnice a porovnáme koeficienty na obou stranách rovnice a dostaneme pro hledané koeficienty soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
9\frac{A_0}{2} &= \frac{1}{\pi} \\
9A_k - k^2 A_k &= -\frac{2}{\pi(4k^2-1)} && k = 2,4,6\ldots \\
9A_k - k^2 A_k &= 0 && k = 1,3,5\ldots \\
9B_1 - B_1 &= \frac{1}{2} \\
9B_k - k^2 B_k &= 0.
\end{aligned}$$

Z první rovnice ihned vidíme

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{9\pi}.$$

Z druhé a třetí rovnice plyne

$$A_k(k^2-9) = \frac{2}{\pi(k^2-1)}, \quad \text{k – liché}, \qquad A_k(k^2-9) = 0, \quad \text{k – sudé}.$$

Tedy

$$A_k = \frac{2}{\pi(k^2-1)(k^2-9)}, \qquad A_3 \in \mathbb{R} \qquad k = 2,4,6\ldots.$$

Ze čtvrté rovnice určíme

$$B_1 = \frac{1}{16}$$

Z poslední rovnice si také vytkneme koeficient a dostáváme

$$B_k(9-k^2) = 0,$$

tedy

$$B_k = 0 \qquad B_3 \in \mathbb{R} \qquad k = 1,5,7,9\ldots$$

Řešení je tedy funkce $y(x)$ v tomto tvaru

$$y(x) = \frac{1}{9\pi} + \frac{1}{16}\sin x + (A_3 \cos 3x + B_3 \sin 3x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(4k^2-1)(4k^2-9)} \cos 2kx,$$

kde A_3 a B_3 jsou libovolné konstanty.