12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Funkce $\sum_{n=0}^{k} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ se nazývá *trigonometrický polynom.* Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ se nazývá *trigonometrická řada.*

Nechť $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$. Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x,$$

kde $n = 0, 1, \ldots$, se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce f.*

Věta 2. Je-li f **po částech hladká** nebo **po částech monotónní** na $[-\pi, \pi]$, pak její Fourierova řada funkce f konverguje k funkci $\hat{f}(p)$ pro každé $p \in [-\pi, \pi]$.

Konvergence je stejnoměrná na uzavřeném intervalu ležícím uvnitř intervalu, kde má f spojitou derivaci.

Věta 3 (Parsevalova rovnost)**.** Nechť f je definována na $[-\pi, \pi]$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x$ konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Definice 4. Nechť f má periodu $2L$. Pak *Fourierovy koeficienty funkce f* jsou definovány jako

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \pi nx/L \, \mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \pi nx/L \, \mathrm{d}x,$$

kde $n = 0, 1, \ldots$.

Fourierova řada pak je definována jako

$$\frac{a_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\pi/L + b_n \sin nx\pi/L.$$

Věta 5 (Integrace)**.** Nechť $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ a nechť konverguje $\int_{-\pi} \pi |f(x)| \, \mathrm{d}x$. Pak pro $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$ platí

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2} \, \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n \cos nx + b_n \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

Věta 6 (Derivace)**.** Nechť f je spojitá po částech hladká funkce na $[-\pi, \pi]$, jejíž derivace je **absolutně integrovatelná**. Pak Fourierovy koeficienty a'_n, b'_n funkce f' lze vyjádřit jako

$$a'_0 = \frac{f(\pi_-) - f(-\pi_+)}{\pi}, \qquad a_n = (-1)^n a'_0 + n b_n, \qquad b'_n = -n a_n.$$

Příklady

1. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$, $x \in (1, 3)$.
2. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$, $x \in (0, 1)$.

   Aplikujte Parsevalovu rovnost.
3. Funkce $f(x) = |x|(1 - |x|)$ na $(-1, 1)$ a pak periodicky s periodou 2.

   Rozviňte do 2-periodické Fourierovy řady a aplikujte Parsevalovu rovnost.
4. Funkce $f(x) = \cos 3x$ na $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, $f(x) = 0$ jinde na $(-\pi, \pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

1. Víme, že pro všechna $x \in (0, 2\pi)$ platí

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

   Integrací člen po členu odvoďte, že pro $x \in [0, 2\pi]$ platí

$$\frac{x^2}{4} - \frac{x\pi}{2} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

   Další integrací odvoďte, že pro $x \in (0, 2\pi)$ platí

$$\frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{x\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

2. Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + 9y = f(x),$$

   kde f je periodickým rozšířením funkce $f^*(x) = \max\{0, \sin x\}$, $x \in [0, 2\pi]$.

1. Nechť platí, že funkce f je integrovatelná na $[0, L]$ a $f(x + L) = f(x)$. Ukažte, že $f \in P(2L)$ a pro její Fourierovy koeficienty platí $0 = a_1 = a_3 = a_5 \cdots$, $0 = b_1 = b_3 \cdots$.
2. Nechť platí, že funkce f je integrovatelná na $[0, L]$ a $f(x + L) = -f(x)$. Ukažte, že $f \in P(2L)$ a pro její Fourierovy koeficienty platí $0 = a_0 = a_2 = a_4 \cdots$, $0 = b_2 = b_4 \cdots$.