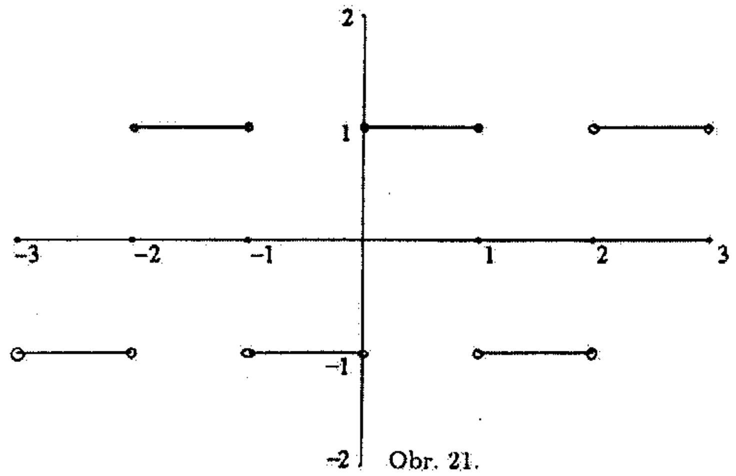
c) Fourierova řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro její součet $s(x)$ na intervalu J platí – viz obr. 21

$$s(x) = \begin{cases} 0, & x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \\ -1, & x \in (-3, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 2), \\ 1, & x \in (-2, -1) \cup (0, 1) \cup (2, 3). \end{cases}$$

Speciálně pro $x = 1/2$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} = 1.$$



Obr. 21.

Příklad 2.15.3.
Nechť f označuje 2π–periodickou funkci definovanou v intervalu $(-\pi, \pi]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0], \\ 0, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

a) Znázorněte graf funkce f v intervalu $J = [-2\pi, 2\pi]$ a vypočtěte její Fourierovy koeficienty.

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a součet prvních pěti nenulových členů.

c) Znázorněte graf součtu Fourierovy řady na intervalu J.

Výsledky:

a) Graf funkce f na intervalu J viz obr. 22.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} dx = 1,$$

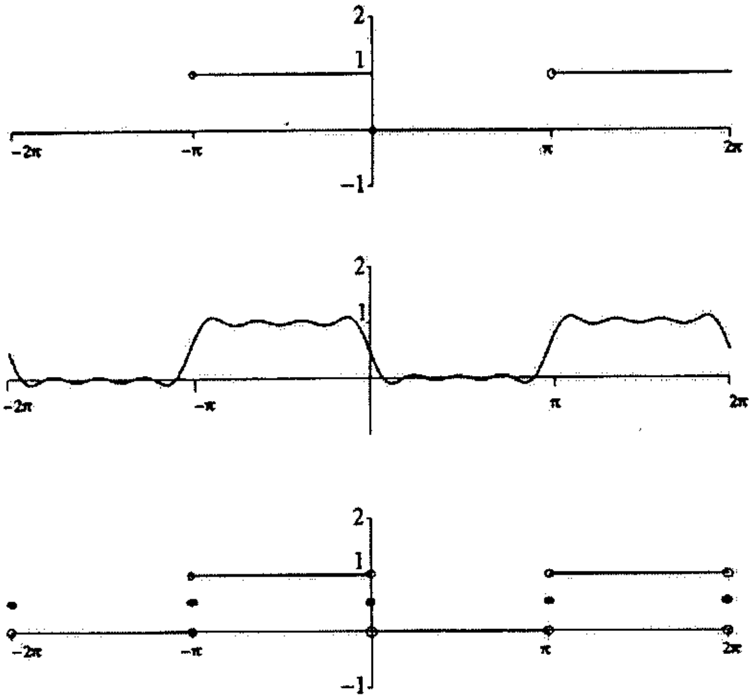
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos kx \, dx = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin kx \, dx = \frac{1}{k\pi} \left[(-1)^k - 1 \right] = \begin{cases} 0, & \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ -\dfrac{2}{k\pi}, & \text{je-li } k \text{ liché}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}, \quad s_4(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x \right).$$

c) Fourierova řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Součet $s(x)$ je roven $f(x)$ vyjma celých násobků π, v nichž je roven $1/2$. Graf částečného součtu s_4 a součtu s na intervalu J viz rovněž obr. 22.



Obr. 22.

PŘÍKLAD 2.15.4. *(Obdélníkový impuls.)*
Nechť $0 < x_0 < \pi$ je dáno a f je periodická funkce s periodou $2L = 2\pi$, která je periodickým prodloužením funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le x_0, \\ 0, & x \in (-\pi, -x_0) \cup (x_0, \pi]. \end{cases}$$

a) Znázorněte graf funkce f v intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ a vypočtěte Fourierovy koeficienty funkce f.

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a určete hodnoty, k nimž konverguje řada pro $x = 0$, $x = x_0$ a $x = \pi$.

c) Pro speciální případ $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ zapište Fourierovu řadu funkce f a součet prvních pěti nenulových členů.

Výsledky:

a) Graf funkce f na intervalu J viz obr. 23. Funkce f je sudá, a proto

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{x_0} dx = \frac{2x_0}{\pi},$$
$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{x_0} \cos kx\, dx = \frac{2}{k\pi}\sin kx_0, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$b_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady π-periodické funkce, která se rovná funkci $\cos x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Řešení. Povšimněme si, že hodnoty funkce v bodech $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nejsou popisem určeny jednoznačně. Nicméně ze zadání snadno plyne, že funkce je v $\mathcal{P}(\pi)$ a že je po částech hladká.

Zadání odpovídá hodnota $l = \frac{\pi}{2}$ z definice Fourierových koeficientů a Fourierovy řady. Všimněme si, že Fourierovy koeficienty a řada zadané funkce budou splývat s koeficienty a řadou funkce $|\cos x|$. To je sudá funkce, a proto tentokrát budou nulové koeficienty b_n. Počítejme

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos\left(nx\frac{\pi}{(\frac{\pi}{2})}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\cos((2n+1)x) + \cos((2n-1)x)\right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right). \end{aligned}$$

Fourierovou řadou všech funkcí odpovídajících zadání je tedy

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

Protože funkce $|\cos x|$ je po částech hladká a spojitá, konverguje tato řada stejnoměrně k funkci $|\cos x|$.

Povšimněme si navíc, že jde zároveň o trigonometrickou řadu 2π-periodické funkce $|\cos x|$. Z výše řečeného je zřejmé, že nalezená řada je zároveň Fourierovou řadou zadané funkce uvažované jako funkce z $\mathcal{P}(2\pi)$. To je tzv. kosinová řada sudé 2π-periodické funkce. ■

P ř í k l a d Uvažujte 1-periodickou funkci, která je rovna x^2 na intervalu $(0, 1)$. Zjistěte, co říká příslušná Parsevalova rovnost pro tuto funkci.

Řešení. Jde o funkci, jejíž čtverec je integrovatelný na intervalu $(0, 1)$. (Navíc jde o po částech hladkou funkci a mohli bychom tedy též studovat, k čemu konverguje příslušná Fourierova řada jako v předchozích příkladech.) Počítejme její Fourierovy koeficienty:

$a_0 = 2\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$,

$a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2 n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$ (proveďte si podrobně a všimněte si, proč jsme počítali a_0 zvlášť),

$b_n = 2\int_0^1 x^2 \sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi n}$.

Parsevalova rovnost nám tedy říká, že

$$2\int_0^1 x^4 \, dx = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^4 n^4} + \frac{1}{\pi^2 n^2} \right).$$

Spočteme-li integrál a užijeme-li rovnost $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, kterou jsme odvodili výše, dostáváme $\frac{2}{5} = \frac{2}{9} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^4 n^4} + \frac{1}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}$, a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

■

Už jsme si zdůraznili to, že aplikací Parsevalovy rovnosti můžeme dostat informaci o součtu číselné řady, která je zajímavá, případně pro nás nová. Totéž lze ovšem říci mnohdy i o součtu Fourierovy řady samotné, jak uvidíme v následujících dvou příkladech.

Příklad Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady funkce $|x|$ na intervalu $(-1, 1)$. (Přesněji: Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady nějaké 2-periodické funkce, která má dané zúžení na $(-1, 1)$.) Co dává výsledek pro bod $x = 0$?

Řešení. Definujme funkci f na celém $\mathbb{R}$ tak, aby splňovala podmínky zadání, byla 2-periodická a navíc pro pohodlí tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}$. Taková funkce je jediná a $f(1 + 2k) = 1$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Tato funkce je navíc po částech hladká. Proto její Fourierova řada konverguje k f stejnoměrně.

Díky sudosti zadané funkce vidíme bez výpočtu, že $b_n = 0$. Snadno spočteme, že $a_0 = 2\int_0^1 x \, dx = 1$ a $a_n = 2\int_0^1 x \cos(nx\pi) \, dx = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)$.

Hledanou Fourierovou řadou je $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2} \cos(nx\pi)$ a ta konverguje stejnoměrně k f na $\mathbb{R}$.

Dosadíme-li $x = 0$, dostaneme $0 = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}$, a tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(Povšimněte si, že poslední rovnost lze odvodit též ze znalosti součtu řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.) ■

4c

Příklad Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady 2π-periodické funkce f, která je rovna $\operatorname{sgn} x$ na intervalu $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a nule na zbytku intervalu $[-\pi, \pi]$. Napište, co výsledek říká pro $x = \frac{\pi}{2}$.

Řešení. Výpočtem zjistíme, že Fourierovou řadou je $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1 - \cos\frac{\pi n}{2}) \sin nx}$ Protože zadaná funkce je po částech hladká, konverguje její Fourierova řada v bodě $\frac{\pi}{2}$

k hodnotě $\frac{f(\frac{\pi}{2}+)+f(\frac{\pi}{2}-)}{2} = \frac{1}{2}$, a tedy je

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1 - \cos\frac{\pi n}{2}) \sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(2n-1)}.$$

Tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$. (Tato rovnost by nám už měla být známa, neboť jde o vyjádření hodnoty funkce arctg 1 pomocí příslušné Taylorovy řady.) ∎

K tomu, abychom lépe rozuměli, jak spolu souvisejí Fourierovy řady funkcí, pokud je rozvíjíme jako funkce s různými periodami, je dobré rozmyslet si, že koeficienty $2l$-periodické funkce vzhledem k trigonometrickému systému $2l$-periodických funkcí a vzhledem k systému $2lk$-periodických funkcí pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ splývají. Přesněji, koeficienty vzhledem k funkcím $\cos\left(nx\frac{\pi}{lk}\right)$, $\sin\left(nx\frac{\pi}{lk}\right)$, kde n není dělitelné k, o které se tyto dva systémy liší, jsou nulové.

<u>Příklad</u> Spočtěte Fourierovy koeficienty π-periodické funkce f, která je rovna x na intervalu $(0, \pi)$. Co říká Parsevalova rovnost?

Řešení. Budeme funkci uvažovat jako 2π-periodickou. Protože platí předchozí věta o jednoznačnosti, musí nám vyjít táž Fourierova řada, kterou bychom dostali, kdybychom uvažovali naši funkci jako π-periodickou. Je $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi$. Pokud k funkci f přičteme konstantu $-\frac{\pi}{2}$, dostaneme lichou funkci. Ale konstantní funkce má nulové koeficienty a_n, $n \in \mathbb{N}$, a tedy můžeme dále počítat jen b_n a to pro funkci f nebo $f(x) - \frac{\pi}{2}$, což musí opět vyjít nastejno. Pro $f(x) - \frac{\pi}{2}$ můžeme ovšem využít lichost této funkce. Máme

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x - \frac{\pi}{2})\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Funkce má integrovatelný kvadrát na intervalu $(-\pi, \pi)$, a tedy z Parsevalovy rovnosti dostáváme, že $\frac{\pi^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}2\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2$.

Celkem máme tedy, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}$, což nás už nepřekvapí. ∎

Podle V.20.2 je tedy

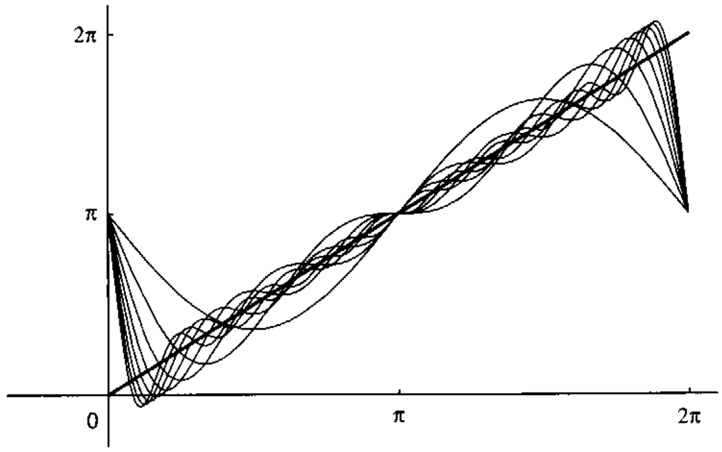
$$s_f(x) = \pi - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

z čehož ihned plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \textit{pro všechna } x \in (0, 2\pi); \tag{29}$$

v bodech 0 a 2π je součet řady vlevo roven 0.

Vzhledem k periodicitě je konvergence řad v (28) a (29) *lokálně stejnoměrná* v intervalu $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a *nestejnoměrná* v každém levém i pravém okolí každého bodu $2n\pi$, protože funkce s_f je v těchto bodech nespojitá.



GRAFY FUNKCE x A PRVNÍCH 8 ČÁSTEČNÝCH SOUČTŮ JEJÍ FOURIEROVY ŘADY V $(0, 2\pi)$

2. Nyní najdeme *sudou a lichou Fourierovu řadu funkce* $f(x) = x$, $x \in (0, \pi)$. Funkce $s_f(x)$ je v případě sudého rozvoje rovna $|x|$ v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$; protože

$$\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi^2}{2} \quad \text{a} \quad \int_0^{\pi} x\cos(2k+1)x\,dx = -\frac{2}{(2k-1)^2} \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N},$$

je

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad \text{v } \langle -\pi, \pi\rangle. \tag{30}$$

Řada vpravo konverguje přitom stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$ a její součet je tam roven funkci $s_f(x)$, která je 2π-periodickým rozšířením funkce $|x|$ z $\langle -\pi, \pi\rangle$ na $\mathbb{R}$.

V případě lichého rozvoje je $s_f(x) = x$ v $(-\pi, \pi)$ a $s_f(\pm\pi) = 0$, přičemž

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx = (-1)^{k-1} \frac{2}{k},$$

takže

$$\boxed{x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{pro všechna } x \in (-\pi, \pi).} \tag{31}$$

Řada vpravo konverguje v každém intervalu $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$, kde $n \in \mathbb{Z}$, lokálně stejnoměrně, konvergence však není stejnoměrná v žádném levém ani pravém prstencovém okolí žádného lichého násobku čísla π; všude v $\mathbb{R}$ řada součet $s_f(x)$.

3. Jestliže v (30) položíme $x = \pi$, dostaneme po evidentní úpravě rovnost

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.} \tag{32}$$

Poznámka 20.5. U řad z (29) a (31) jsme byli dosud schopni vyšetřit jen (neabsolutní, lokálně stejnoměrnou) konvergenci; nyní jsme našli jejich součty a podařilo se nám sečíst i číselnou řadu (32). V dalších příkladech (řešených i ponechaných čtenáři jako cvičení) sečteme další řady čísel a funkcí; *nezodpovězena však bohužel zůstane otázka, kterou funkci máme rozvinout, abychom získali součet předem dané číselné řady.* Nezbývá asi nic jiného než rozvinout co nejvíce funkcí a hledat mezi výsledky řadu, jejíž součet bychom rádi znali.

Příklad 20.4. *Fourierova řada funkce $f(x) = x^2$ v intervalu $I := (0, 2\pi)$* má, jak zjistíme standardním výpočtem, tyto koeficienty:

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3}, \quad a_k = \frac{4}{k^2}, \quad b_k = -\frac{4\pi}{k} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N};$$

2π-periodická funkce $s_f(x)$ se přitom rovná x^2 v I a $\frac{1}{2}(f(0)+f(2\pi)) = 2\pi^2$ v bodech 0 a 2π. Podle V.20.2 je

$$s_f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}; \tag{33}$$

první řada vpravo konverguje (podle srovnávacího kritéria) stejnoměrně v $\mathbb{R}$, druhá lokálně stejnoměrně v každém intervalu $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně ve všech levých i pravých prstencových okolích bodů $2n\pi$.

Dosadíme-li $x = 0$, bude vlevo $s_f(0) = 2\pi^2$ a jednoduchou úpravou získáme rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{34}$$

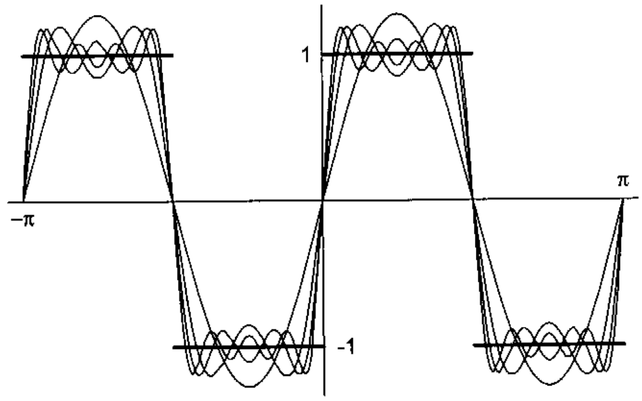
(1d) **Příklad 20.7.** Hledejme *sudou a lichou Fourierovu řadu funkce*

$$f(x) := \operatorname{sgn}(\sin 2x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{v intervalu } (0, \tfrac{1}{2}\pi) \\ -1 & \text{v intervalu } (\tfrac{1}{2}\pi, \pi) \end{array} \right\}. \tag{51}$$

Označíme-li $s_{f,s}$ a $s_{f,l}$ funkce (27′) a (27″) z Po. 20.4, bude

$$s_{f,s}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{je-li } x \in (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \\ -1, & \text{je-li } x \in (\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi) \\ 0, & \text{je-li } x \in \{\pm\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\} \end{array} \right\}, \quad s_{f,l}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{je-li } x \in (0, \tfrac{1}{2}\pi) \\ -1, & \text{je-li } x \in (-\tfrac{1}{2}\pi, 0) \\ 0, & \text{je-li } x \in \{\pm\tfrac{1}{2}\pi, 0\} \end{array} \right\};$$

první z těchto funkcí je přitom 2π-periodická, druhá π-periodická.



GRAFY FUNKCE $\operatorname{sgn}(\sin 2x)$ A PRVNÍCH 4 ČÁSTEČNÝCH SOUČTŮ JEJÍ LICHÉ FOURIEROVY ŘADY

Koeficienty a_k resp. b_k sudého resp. lichého rozvoje jsou

$$a_0 = 0, \quad a_k = \frac{4}{k\pi} \sin(\tfrac{1}{2} k\pi) \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \tag{52}$$

resp.

$$b_k = \frac{2(1 + (-1)^k) - 4\cos(\tfrac{1}{2} k\pi)}{k\pi} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}, \tag{53}$$

takže

$$a_{2k-1} = (-1)^k \frac{4}{(2k-1)\pi}, \quad b_{4k-2} = \frac{4}{(2k-1)\pi} \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N}, \tag{54}$$

zatímco všechny koeficienty a_{2k}, b_{4k-3}, b_{4k-1} a b_{4k} jsou nulové. Příslušné Fourierovy řady jsou

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} \quad \text{a} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(4k-2)x}{2k-1}; \tag{55}$$

první konverguje lokálně stejnoměrně v intervalech $I_n := (\frac{1}{2}(2n-1)\pi, \frac{1}{2}(2n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí krajních bodů těchto intervalů, druhá konverguje lokálně stejnoměrně v intervalech $J_n := (\frac{1}{2}n\pi, \frac{1}{2}(n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí krajních bodů těchto intervalů.

Uvážíme-li, že součet první řady v bodě 0 je 1, získáme pozoruhodnou rovnost

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots = \frac{\pi}{4}\,;} \tag{56}$$

poznamenejme však, že alternující řada vlevo se k přibližnému výpočtu čísla π příliš nehodí, protože konverguje velmi pomalu. (Rozdíl $\frac{1}{4}\pi$ a jejího pětistého částečného součtu je přibližně 0.0005.)

Poznámka 20.7. Integrací člen po členu levé strany identity (42) bychom získali řadu o členech $\sin kx/k^2$ a další integrací řadu o členech $\cos kx/k^3$; pro $x = 0$ bychom tak získali řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,, \tag{57}$$

o jejíž sečtení se marně usiluje celá staletí. Zde naznačený postup samozřejmě též selhává, protože funkce primitivní k pravé straně identity (42) nepatří mezi elementární funkce, a právě tak tam nepatří ani funkce k ní primitivní.

Zatímco součty řad o členech $1/k^n$ se sudým $n \in \mathbb{N}$ lze vypočítat podle celkem jednoduchého vzorce (viz např. kap. XVI knihy [13] nebo str. 286 knihy [6]), *nalezení vzorců pro součty obdobných řad s lichým $n \in \mathbb{N}$ by nepochybně svého řešitele rázem proslavilo.*

Poznámka 20.8. Dosud jsme mluvili jen o rozvojích 2π-periodických funkcí; všechny vyložené postupy však lze (po evidentních modifikacích) opakovat s obecnějšími q-periodickými funkcemi, kde $q \in \mathbb{R}_+$.

Má-li q-periodická funkce f konečný integrál $\int_0^q f$, můžeme vytvořit obecnější **Fourierovu řadu s periodou** q a psát

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos\frac{2k\pi x}{q} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{q}\Big), \tag{58}$$

kde čísla a_k ($k \geq 0$) a b_k ($k \in \mathbb{N}$) jsou nyní dána rovnostmi

$$a_k := \frac{2}{q}\int_{\xi}^{\xi+q} f(x)\cos\frac{2k\pi x}{q}\,dx, \quad b_k := \frac{2}{q}\int_{\xi}^{\xi+q} f(x)\sin\frac{2k\pi x}{q}\,dx \tag{59}$$

s libovolným $\xi \in \mathbb{R}$. Funkce $\cos(2k\pi x/q)$, $\sin(2k\pi x/q)$ mají periodu q a splňují podmínky (5) – (7), nahradíme-li na jejich pravých stranách číslo π číslem $\frac{1}{2}q$.

Příklad 20.8. Máme-li např. funkci $f(x) := x$ rozvést ve Fourierovu řadu v intervalu $(1,3)$, bude mít součet s_f této řady periodu $q = 2$ a v intervalu $\langle 1,3\rangle$ bude definován podmínkami

$$(60)\qquad s_f(x) = x \text{ pro } x \in (1,3),\quad s_f(x) = \tfrac{1}{2}(f(1) + f(3)) = 2 \text{ pro } x \in \{1,3\}.$$

Snadno zjistíme, že

$$(61')\qquad a_0 = 4,\ a_k = 0,\ b_k = (-1)^{k-1}\frac{2}{k\pi} \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N},$$

takže je

$$(61'')\qquad s_f(x) = 2 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin k\pi x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R};$$

řada vpravo přitom konverguje v každém intervalu $(2k-1, 2k+1)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, lokálně stejnoměrně a konvergence je nestejnoměrná v každém levém i v každém pravém prstencovém okolí každého lichého čísla (sr. s (31)).

Cvičení

Kromě konkrétní úlohy uvedené v každém z následujících cvičení najděte vždy a) funkci $s_f(x)$, tj. součet příslušné Fourierovy řady v $\mathbb{R}$, b) všechny maximální otevřené intervaly, v nichž daná řada konverguje lokálně stejnoměrně, c) všechny body, v jejichž žádném okolí není konvergence stejnoměrná. (Sr. s Po. 20.4.)

20.08⁰. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := x$ v intervalu $(\alpha, \alpha + 2\pi)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

20.09⁰. Dokažte, že

$$(62)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \tfrac{1}{4}\pi\,\operatorname{sgn} x \quad \text{v intervalu } (-\pi,\pi),$$

a odvoďte z toho, že

$$(63)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

20.10⁰. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := |\sin x|$ v intervalu $(-\pi,\pi)$ a pomocí ní dokažte, že

$$(64)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \tfrac{1}{2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} = \tfrac{1}{4}(\pi - 2);$$

uvažte, že první z těchto řad lze snadno sečíst i bez užití Fourierových řad.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\left((-1)^{n+1}+1\right)\sin nx}{n^2-4} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(2n+1)^2-4}\sin(2n+1)x$$

Příklad 8. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ funkci

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & x \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & x \in \langle 0, \pi) \,. \end{cases}$$

Řešení:

Jde o lichou funkci, tedy všechny její koeficienty a_n jsou nulové. Spočteme koeficienty b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x\right) =$$

$= \text{použiji metodu per partes} =$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n} = \frac{1}{n}$$

Podle Dirichletovy věty řada konverguje pro všechna $x \in (-\pi, \pi)$

kromě $x = 0$ k zadané funkci:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

Příklad 9. Funkci $f(x) = \pi^2 - x^2$ rozložte ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$. Najděte součty řad:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Řešení:

Jde o sudou funkci, tedy všechny její koeficienty b_n jsou rovny nule. Spočtu koeficienty a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[x\pi^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi^2$$

PŘÍKLAD 2.15.5.
Zapište Fourierovu řadu 2π-periodické funkce g definované na intervalu $(-\pi, \pi]$ předpisem

$$g(x) = \begin{cases} 1+\sin x, & x \in (-\pi, 0], \\ \sin x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Návod. Využijte výsledku Příkladu 2.15.3.

Výsledky:

Poněvadž $g(x) = \sin x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kde f je funkce z Příkladu 2.15.3, je Fourierova řada funkce g rovna

$$\frac{1}{2} + \sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1} = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}.$$

PŘÍKLAD 2.15.6.
Nechť f označuje 4-periodickou funkci definovanou v intervalu $(-2, 2]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2, 0], \\ x-1, & x \in (0, 2]. \end{cases}$$

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty funkce f a načrtněte její graf v intervalu $J = [-4, 8]$.

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a její částečný součet s_2.

c) Určete součet s Fourierovy řady v intervalu J a načrtněte jeho graf.

Výsledky:

a)

$$a_0 = -1,$$

$$a_k = \frac{2}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ -\dfrac{4}{k^2\pi^2}, & \text{je-li } k \text{ liché}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$-\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{2},$$

$$s_2(x) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{\pi}\sin \pi x.$$

c) Řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Součet $s(x)$ je roven $f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ vyjma čísel $\pm 2, \pm 6, \pm 10, \ldots$, v nichž je roven nule – viz obr. 24. Speciálně,

$$s(x) = \begin{cases} x+3, & x \in [-4, -2), \\ -1, & x \in (-2, 0] \cup (2, 4] \cup (6, 8], \\ x-1, & x \in (0, 2), \\ 0, & x = -2, 2, 6 \\ x-5, & x \in (4, 6). \end{cases}$$