11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Funkce $\sum_{n=0}^{k} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ se nazývá *trigonometrický polynom.* Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ se nazývá *trigonometrická řada.*

Nechť $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$. Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x,$$

kde $n = 0, 1, \ldots$, se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce f.*

Věta 2. Platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin nx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx \, \mathrm{d}x = \pi, \qquad n, k = 1, 2 \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, \mathrm{d}x = 0, \qquad n, k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, \mathrm{d}x = 0, \qquad n \neq k; n, k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, \mathrm{d}x = 0, \qquad n \neq k; n, k = 0, 1, 2 \ldots$$

Věta 3. Je-li f **spojitá** a **po částech hladká**, pak Fourierova řada funkce f konverguje absolutně a stejnoměrně.

Věta 4. Je-li f **po částech hladká** nebo **po částech monotónní** na $[-\pi, \pi]$, pak její Fourierova řada funkce f konverguje k funkci $\hat{f}(p)$ pro každé $p \in [-\pi, \pi]$.

Konvergence je stejnoměrná na uzavřeném intervalu ležícím uvnitř intervalu, kde má f spojitou derivaci.

Věta 5 (Parsevalova rovnost)**.** Nechť f je definována na $[-\pi, \pi]$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x$ konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Definice 6. Nechť f má periodu $2L$. Pak *Fourierovy koeficienty funkce f* jsou definovány jako

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \pi n x / L \, \mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin \pi n x/L \,\mathrm{d}x,$$

kde $n = 0, 1, \ldots$.

Fourierova řada pak je definována jako

$$\frac{a_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x\pi/L + b_n \sin n x \pi/L.$$

Příklady

1. Perioda 2π
   (a) Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \mathrm{sgn} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = 0$ jinde na $(-\pi, \pi)$.
   Dosaďte $x = \frac{\pi}{2}$.
   (b) Najděte sudou a lichou Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$, $x \in (0, \pi)$.
   Dosaďte do lichého rozvoje $x = \pi$ a ověřte, že je to legální.
   (c) Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$, $x \in (0, 2\pi)$.
   Dosaďte $x = 0$.
   (d) Najděte sudou a lichou Fourierovu řadu funkce $f(x) = \mathrm{sgn}(\sin 2x)$, $x \in (0, \pi)$.
   Dosaďte $x = 0$.
   (e) Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = -\frac{1}{2}(\pi + x)$, $x \in (-\pi, 0)$, $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ na $[0, \pi)$.
   (f) Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = 1 + \sin x$, $x \in (-\pi, 0]$, $f(x) = \sin x$ na $(0, \pi)$.

2. Jiné periody
   (a) Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$, $x \in (1, 3)$.
   (b) Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$, $x \in (0, 1)$.
   Aplikujte Parsevalovu rovnost.