10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Poloměr mocninné řady)**.** Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ existuje číslo $\rho \in [0,\infty]$ takové, že řada konverguje na množině $\{x, |x-x_0| < \rho\}$ a diverguje na $\{x, |x-x_0| > \rho\}$ (pro $x = x_0+\rho$ a $x = x_0-\rho$ nevíme nic). Platí:

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

což se rovná

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}} = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

pokud limity existují.

Číslo ρ se nazývá *poloměr konvergence* dané mocninné řady.

Věta 2. Je-li $q \in (0,\rho)$, pak řada konverguje stejnoměrně a absolutně na $\{x, |x-x_0| \leq q\}$.

Součtem mocninné řady je funkce spojitá na $\{x, |x-x_0| < \rho\}$.

Věta 3. Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence ρ má součet $f(x)$. Pak na $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

a

$$\int f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Obě mají poloměr konvergence ρ.

Věta 4 (Abelova věta)**.** Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence. Pak tato mocninná řada konverguje v $x_0+\rho \Leftrightarrow$ tato mocninná řada konverguje na $[x_0, x_0+\rho]$ stejnoměrně.

V takovém případě

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = \lim_{x \to x_0+\rho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Věta 5 (Operace s mocninnými řadami)**.** Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence R_1 a R_2. Pak

(a) $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{R_1, R_2\}$,

(b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{R_1, R_2\}$.

Postup:

1. Výpočet poloměru konvergence
2. Oba krajní body
3. Pro součet:
   (a) "nějak" to sečtu, obvykle přes derivaci/integraci + geometrickou řadu
   (b) Abelova věta

Hint

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Příklady

1. Najděte poloměr konvergence, vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) na hranici a udělejte závěr ohledně stejnoměrné konvergence:

   (a)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n,$$
   kde $(0 < \alpha < 1)$
   Řešení: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu
   $$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha^{n^2}|} = \limsup_{n\to\infty} \alpha^n = 0,$$
   a tedy $R = +\infty$.

   (b)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p},$$
   kde $p \in \mathbb{R}$.
   Řešení: Pro každé $p \in \mathbb{R}$ platí
   $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \right| = 1,$$
   tudíž poloměr konvergence je vždy 1.
   Chování na hranici:
   Pokud $p > 1$, pak řada konverguje absolutně na hranici.

Pokud $1 \geq p > 0$, potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p},$$

konverguje neabsolutně dle Leibnize. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

diverguje.

Pro $p < 0$ řada na hranici diverguje.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n,$$

kde $(a > 1)$

Řešení:

Platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{a^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{(n+1)^2-n^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty.$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

Řešení:

Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|3^n + (-2)^n|}{n}} = \limsup_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{\sqrt[n]{|1 + (-2/3)^n|}}{\sqrt[n]{n}} = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3.$$

tudíž poloměr konvergence je $\frac{1}{3}$.

Chování na hranici: Je třeba vyšetřit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

V prvním případě máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n},$$

což porovnáme s řadou $b_n = 1/n$, což diverguje.
V druhém případě získáme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2^n}{n3^n}.$$

První část konverguje z Leibnize, druhá z d'Alamberta, tedy konverguje. Absolutní konvergenci již vyloučil první případ.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$$

Řešení:
Jedná se o mocninnou řadu, jejíž koeficienty jsou povětšinou nulové, s výjimkou koeficientů u x^{n^2}. Uvědomte si nyní, že koeficient $\frac{1}{2^n}$ je koeficient nikoliv u n-tého, ale n^2-tého členu této řady! Abychom mohli použít vztahy pro výpočet poloměru konvergence, potřebujeme najít vztah pro n-tý koeficient a_n!
Jestliže ale platí

$$a_{n^2} = \frac{1}{2^n} \qquad \text{a koeficienty jsou jinde nulové,}$$

potom

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \qquad \text{pokud } n = k^2 \text{ pro nějaké } k \text{ přirozené} \\ a_n &= 0 \qquad \text{jinak} \end{aligned}$$

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu spočteme

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

Na hranici řada zjevně konverguje absolutně.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n,$$

kde $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots$.
Řešení:

Platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}{\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1.$$

Pro konvergneci na hranici využijeme odhadů dokazatelných indukcí

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Z prvního odhadu je zřejmé, že pro $x = 1$ řada diverguje srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{2n+1}$. Z druhého odhadu vyplývá, že pro $x = -1$ řada konverguje neabsolutně podle Leibnize. (nutno dokázat monotonii posloupnosti $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$).

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$$

Řešení: Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{[3+(-1)^n]^n} = \limsup_{n\to\infty} [3+(-1)^n] = 4.$$

Tudíž $R = \frac{1}{4}$.

Konvergence na hranici: Vyšetřujeme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} \frac{1}{4^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} \frac{(-1)^n}{4^n}$$

Podíváme-li se pouze na sudé členy, dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{2n} \frac{1}{4^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n},$$

která diverguje.

Pro liché členy dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{4^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}},$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{(-1)^n}{4^{2n+1}},$$

které konvergují absolutně.

Sečtením „liché“ a „sudé části“ řady dospíváme k závěru, že pro $\alpha = 0$ řada na hranici diverguje.

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n},$$
kde $a > 0$, $b > 0$.

Řešení:

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n + b^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\max(a,b)} \sqrt[n]{\frac{\max(a^n, b^n)}{a^n + b^n}} = \frac{1}{\max(a,b)},$$
a tudíž
$$R = \max(a, b).$$
Na hranici řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max(a,b)^n}{a^n + b^n} \to 1 \neq 0.$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

Řešení:

Je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n!)}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$
Tudíž poloměr konvergence je 4.

Na hranici tedy vyšetřujeme řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$$
a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n 4^n.$$
Pro $x = -4$ máme:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2 x^n 4^n}{(2n)!}$$
použijeme Leibnize a zjišťujeme, zda
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

jde k 0. Porovnáme a_n a a_{n+1}:

$$\frac{a_n}{a_n+1} = \frac{n!n!4^n(2n+2)!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!4\cdot 4^n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{4n+2}{4n+4} < 1$$

Tedy posloupnost a_n je rostoucí, první člen je roven 1, tedy zjevně nejde k 0, tedy řada diverguje v bodě -4. Tedy v bodě 4 také.

Závěr: řada konverguje na $(-4,4)$.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot x^n$$

Řešení: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} = \limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e,$$

a tedy $R=\frac{1}{e}$.

Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}(-1)^n.$$

Platí ale

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

tudíž řada diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence $a_n \to 0$. Limitu lze spočítat například takto pomocí Taylorova rozvoje (s využitím spojitosti exponenciální funkce):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\frac{1}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\exp\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right] =$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})\right)-x\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{2}+o(1)\right] = e^{-1/2+0} = e^{-1/2}.$$

Závěr: řada konverguje na $(-1/e, 1/e)$.

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},$$
kde $a > 0$.

Řešení:

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}} = \limsup_{n\to\infty} a^{-\sqrt{n}\cdot 1/n} = a^0 = 1.$$
Tedy
$$R = 1.$$
Pokud $a > 1$, potom řada na hranici konverguje absolutně, což ze srovnání
$$\frac{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{a^{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
(Limitu lze spočíst například použitím Heineho věty a dvojnásobným aplikováním l'Hopitalova pravidla.)

Pokud $0 < a \leq 1$, potom řada na hranici diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, $a_n \not\to 0$.

(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \cdot x^n,$$
kde $a > 0$, $b > 0$.

Řešení: Máme
$$a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}$$
Vyšetříme dva případy, nejprve $a \geq b$, pak
$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{a^n}{n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2a^n}{n}} \overset{VOAL}{=} a$$
$$\rho = \frac{1}{a}$$
analogicky pro $a < b$:
$$b = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2b^n}{n}} \overset{VOAL}{=} b$$
$$\rho = \frac{1}{b}$$

Tedy $\rho = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$.
Krajní body vyšetříme pro oba případy zvlášť. Řadu rozvíjíme v 0, tedy krajní body jsou $\rho = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$a $-\rho = -\min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$.
Nechť $a \geq b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) \frac{1}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{b^n}{a^n n^2}\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Použijeme porovnání řad (vše je tu kladné!) a zjistíme, že řada diverguje, jelikož je to kladné, tak i v absolutní hodnotě. Druhý krajní bod:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) \frac{(-1)^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n b^n}{a^n n^2}\right)$$

Toto můžeme roztrhnout na 2 konvergentní řady, první konverguje z Leibnize, druhá taktéž. Tedy řada v krajním bodě $-1/a$ konverguje, ale nikoli absolutně.
Nechť $a < b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) \frac{1}{b^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{b^n n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Toto opět roztrhneme na 2 řady, první konverguje z d'Alembertova kritéria, o druhé to víme. Tedy roztržení bylo korektní (roztrhli jsme na 2 konvergentní řady), řada konverguje. Dosadíme-li následně jako krajní bod $-1/b$, můžeme rozvnou říci, že řada konverguje absolutně.
Tím jsme hotovi, jen je třeba dát pozor na případ $a = b$.

2. Derivováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

   (a) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots$
   Řešení: Označme
   $$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$
   Formálním derivováním člen po členu dostaneme řadu
   $$1 + x^2 + x^4 + \dots$$
   což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem x^2. Zároveň je to mocninná řada s koeficienty střídavě 0 a 1, má tedy poloměr konvergence roven jedné. Původní řada má tedy poloměr konvergence také roven jedné a uvnitř kruhu konvergence platí
   $$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Lze ověřit přímým výpočtem, že

$$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2},$$

tudíž

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

(b) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$
Řešení: Označme

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Formálním derivováním člen po členu dostaneme řadu

$$1 - x^2 + x^4 + \dots$$

což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem $-x^2$. Zároveň je to mocninná řada s koeficienty střídavě 0 a ± 1, má tedy poloměr konvergence roven jedné. Původní řada má tedy poloměr konvergence také roven jedné a uvnitř kruhu konvergence platí

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Platí, že

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

tudíž

$$f(x) = \arctan x, \qquad |x| < 1.$$

Poznámka: Vztah platí pro $|x| \leq 1$, k tomu je ale zapotřebí lepší teorie, než máme k dispozici.

3. Integrováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

(a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$
Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$

Podle „podílového kritéria“ má poloměr konvergence jedna. Platí, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Označme
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$
Potom na kruhu konvergence platí integrováním člen po členu, že
$$f(x) = F'(x), \qquad \text{kde} \qquad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x}.$$
Odtud vyplývá, že
$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1$$
a odtud
$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = xf(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1.$$

(b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

Řešení: Řada má poloměr konvergence jedna, jak plyne z „podílového kritéria“. Máme sečíst řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^{k-1} =$$
což, podle věty o integrování člen po členu, je rovno
$$= x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^k\right)' = x \cdot \left(x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{k-1}\right)' =$$
a znovu podle věty o integrování člen po členu a vztahu pro součet geometrické řady platí
$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k\right)'\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)'\right)' =$$
a nyní zbývá jen spočítat příslušné derivace
$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}\right)\right)' = x \cdot \left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)' =$$
$$= x \cdot \left(\frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4}\right) = x \cdot \frac{1-x^2}{(1+x)^4} = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

(c) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k.$$

Poloměr konvergence je jedna, jak plyne z „podílového kritéria“. Podle věty o integraci člen po členu platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k+1}\right)' = \left(x^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}\right)' =$$

$$= \left(x^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right)' = \left(x^2 \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \left(x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}\right)' =$$

$$= \frac{2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2x - 4x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 2x^3}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

4. Najděte součet následujících řad.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

Řešení:

Již výše jsme spočetli, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

Dosazením $x = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} = 8.$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

Řešení: Namísto $(-1)^k/3^k$ budeme psát x^k a potom dosadíme $x = -\frac{1}{3}$. Sečtěme tedy řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k.$$

Poloměr konvergence je roven jedné. Je

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)'\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right)'\right)' =$$

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' \right)' \right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) \right)' \right)' =$$

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' \right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{1+x}{(1-x)^3} \right) \right)' =$$

$$= x \cdot \left(\frac{x+x^2}{(1-x)^3} \right)' = \frac{x(1+4x+x^2}{(1-x)^4}.$$

Odvodili jsme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = \frac{x(1+4x+x^2}{(1-x)^4}, \qquad |x| < 1.$$

Nyní dosazením $x = -\frac{1}{3}$ do levé a pravé strany dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} k^3 = \frac{3}{128}.$$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Řešení:

Řada konvegruje podle Leibnizova kritéria. Podle Abelovy věty je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Označme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Potom na kruhu konvergence platí

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x}^{k-1} = -\frac{1}{1+x},$$

a tedy

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x} = -\ln(1+x) + C,$$

přičemž, protože $f(0) = 0$, je $C = 0$. Odtud vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x \to 1-} f(x) = -\ln 2.$$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Řešení:

Řada je evidentně konvergentní. Lze ji samozřejmě sečíst elementárně pomocí vztahu

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Snadno tak dostaneme, že

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} = 1.$$

Nicméně to zkusme Abelovou metodou. Za tím účelem sečteme řadu

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}.$$

Na kruhu konvergence je

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x},$$

a proto

$$f'(x) = \int \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(1-x) + C_1,$$

přičemž $f'(0) = 0$, a tedy $C_1 = 0$. Nyni integrací per partes (s funkcemi $u' = 1$ a $v = \ln(1-x)$) dostaneme

$$f(x) = x - x\ln(1-x) + \ln(1-x) + C_2,$$

opět je zřejmě $f(0) = 0$, a proto $C_2 = 0$. Nakonec, podle Abelovy věty, platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{x\to 1-} f(x) = 1 - 1\cdot\ln(1) + \ln(1) = 1.$$