10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Poloměr mocninné řady)**.** Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ existuje číslo $\rho \in [0,\infty]$ takové, že řada konverguje na množině $\{x, |x-x_0| < \rho\}$ a diverguje na $\{x, |x-x_0| > \rho\}$ (pro $x = x_0 + \rho$ a $x = x_0 - \rho$ nevíme nic). Platí:

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

což se rovná

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}} = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

pokud limity existují.

Číslo ρ se nazývá *poloměr konvergence* dané mocninné řady.

Věta 2. Je-li $q \in (0,\rho)$, pak řada konverguje stejnoměrně a absolutně na $\{x, |x-x_0| \leq q\}$.

Součtem mocninné řady je funkce spojitá na $\{x, |x-x_0| < \rho\}$.

Věta 3. Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence ρ má součet $f(x)$. Pak na $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

a

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Obě mají poloměr konvergence ρ.

Věta 4 (Abelova věta)**.** Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence. Pak tato mocninná řada konverguje v $x_0+\rho \Leftrightarrow$ tato mocninná řada konverguje na $[x_0, x_0+\rho]$ stejnoměrně.

V takovém případě

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = \lim_{x \to x_0+\rho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Věta 5 (Operace s mocninnými řadami)**.** Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence R_1 a R_2. Pak

(a) $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{R_1, R_2\}$,

(b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{R_1, R_2\}$.

Postup:

1. Výpočet poloměru konvergence
2. Oba krajní body
3. Pro součet:
   (a) "nějak" to sečtu, obvykle přes derivaci/integraci + geometrickou řadu
   (b) Abelova věta

Hint

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Příklady

1. Najděte poloměr konvergence, vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) na hranici a udělejte závěr ohledně stejnoměrné konvergence:

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n,$$
kde $(0 < \alpha < 1)$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^p},$$
kde $p \in \mathbb{R}$.

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n,$$
kde $(a > 1)$

(d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$$

(e)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$$

(f)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n,$$
kde $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots$.

(g)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$$

(h)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n},$$
kde $a > 0$, $b > 0$.

(i)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

(j)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$$

(k)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},$$
kde $a > 0$.

(l)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \cdot x^n,$$
kde $a > 0$, $b > 0$.

2. Derivováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

   (a) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots$

   (b) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots$

3. Integrováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

   (a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

   (b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

   (c) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

4. Najděte součet následujících řad.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

   (c) VZOR: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$