P ř í k l a d   Řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ nekonverguje stejnoměrně na $[0,1]$, neboť po dosazení $x = 1$ řada diverguje.

Poznámka. Vyšetřování bodové konvergence řad funkcí je vlastně zkoumáním konvergence číselné řady s parametrem. Proto se v případě potřeby budeme na řadu funkcí dívat jako na řadu s parametrem. A mluvíme-li o konvergenci řady funkcí na množině, myslíme samozřejmě bodovou konvergenci.

§85. To, že řada nekonverguje stejnoměrně, lze někdy dokázat s použitím následující **nutné podmínky pro stejnoměrnou konvergenci**.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konverguje (lokálně) stejnoměrně na množině* M, *pak funkce* $a_n(x)$ *na* M *konvergují (lokálně) stejnoměrně k* 0.

P ř í k l a d   Konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ stejnoměrně na intervalu $(0,1)$?

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce x^n na $(0,1)$ rostoucí a v bodě 1 zleva má limitu 1, je tedy $\sup_{x\in(0,1)} x^n = 1$. Proto funkce x^n nekonvergují k 0 stejnoměrně na $(0,1)$. Tudíž naše řada nekonverguje stejnoměrně. ■

Stejným způsobem lze ukázat, že řada z předchozího příkladu nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu tvaru $(1-\varepsilon, 1)$ pro $\varepsilon \in (0,1)$.

§86. Někdy může být užitečný následující triviální postřeh.

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *je řada funkcí na množině* M *a* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konverguje (lokálně) stejnoměrně na* M, *právě když (lokálně) stejnoměrně na* M *konverguje řada* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n(x)$.

Tento postřeh sám o sobě příliš aplikací nemá, jeho důležitost spočívá v kombinaci s jinými kritérii. Často totiž stačí, aby předpoklady kritéria byly splněny „od jistého n_0 počínaje".

§87. Jednoduchou postačující podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci řad je **Weierstrassovo kritérium**.

Jestliže (číselná) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje a pro každé* $x \in M$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n(x)| \le b_n$, *pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* M.

P ř í k l a d   Zkoumejte stejnoměrnou konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2}$ na $[0,+\infty)$.

Řešení. Označme $a_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2}$. Funkce a_n je spojitá a nezáporná na $[0,+\infty)$.

UKÁZAT

Nalezněme její maximum.

Pro $x \in (0,\infty)$ je $a_n'(x) = \frac{n(n^4-3x^2)}{2\sqrt{x}(n^4+x^2)^2}$, a tedy funkce a_n je rostoucí na $[0, n^2/\sqrt{3}]$ a klesající na $[n^2/\sqrt{3}, +\infty)$. Maximum má tedy v bodě $x_n = n^2/\sqrt{3}$. Dosazením zjistíme, že $a_n(x_n) = \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$. Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$ konverguje (viz §45), konverguje naše řada stejnoměrně na $[0,+\infty)$ podle Weierstrassova kritéria. Je totiž $|a_n(x)| = a_n(x) \le \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$ pro každé $x \in [0,\infty)$. ■

P ř í k l a d   Na kterých intervalech je stejnoměrně konvergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$? Určete maximální intervaly, na kterých řada konverguje lokálně stejnoměrně.

Řešení. Nejprve vyšetřeme bodovou konvergenci. Dle §39 řada konverguje, právě když $x \in (-1,1)$. Z příkladu v §85 už víme, že nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu tvaru $(1-\varepsilon, 1)$. Stejně lze ukázat, že nekonverguje stejnoměrně na intervalech $(-1, -1+\varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$, protože ani na těchto intervalech posloupnost funkcí x^n nekonverguje stejnoměrně k 0.

Dále uvažujme interval $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ pro $\varepsilon \in (0,1)$. Je-li x z tohoto intervalu, pak $|x^n| \le (1-\varepsilon)^n$. Protože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^n$ konverguje, podle Weierstrassova kritéria naše řada konverguje stejnoměrně na $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Shrňme výsledky: Maximální množinou, kde řada konverguje bodově, je $(-1,1)$; řada konverguje stejnoměrně na $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ pro každé $\varepsilon \in (0,1)$, konvergence není stejnoměrná na $(1-\varepsilon, 1)$ ani na $(-1, -1+\varepsilon)$ pro žádné $\varepsilon > 0$. Protože podle předchozí věty pro každé $x \in (-1,1)$ řada konverguje stejnoměrně na nějakém okolí x, řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1,1)$. ■

P ř í k l a d   Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$?

Řešení. Všechny členy řady mají smysl pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Na podmnožinách této množiny je její konvergence (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná) ekvivalentní příslušnému typu konvergence řady $\sum\limits_{n=8}^{\infty} x^{n-7}$, což je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$. Z předchozího příkladu a §86 plyne, že řada konverguje stejnoměrně na intervalech $[-1+\varepsilon, 0)$ a $(0, 1-\varepsilon]$ pro každé $\varepsilon \in (0,1)$, nikoli však na $(-1, -1+\varepsilon)$ nebo na $(1-\varepsilon, 1)$. ■

Weierstrassovo kritérium je postačující podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci, nikoli však podmínkou nutnou. A to ani pro řady s nezápornými členy. O tom svědčí i předchozí příklad – tam uvedená řada konverguje stejnoměrně například na $(0, 1/2)$. Nicméně prvních šest členů této řady tvoří funkce, které na $(0,1/2)$ nejsou omezené, a tudíž předpoklady Weierstrassova kritéria nemohou být splněny. Weierstrassovo kritérium lze ovšem použít na řadu $\sum\limits_{n=8}^{\infty} x^{n-7}$, což bylo uděláno v předminulém příkladě. Následující příklad ukazuje, že Weierstrassovo kritérium není nutnou podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci ani v kombinaci s §86.

Příklad Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, kde

$$a_1(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \in (0,\pi), \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus (0,\pi); \end{cases}$$

$$a_n(x) = \frac{1}{n} a_1(x - (n-1)\pi) \text{ pro } x \in \mathbb{R} \text{ a } n \geq 2\ ?$$

Řešení. Řada zřejmě konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, protože $a_n(x)$ je nenulové nejvýše pro jedno $n \in \mathbb{N}$. Přitom $a_n(x) \geq 0$ a $\max_{x \in \mathbb{R}} a_n(x) = \frac{1}{n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, Weierstrassovo kritérium tedy použít nelze.

Nicméně, označíme-li $s(x)$ součet a $s_n(x)$ n-tý částečný součet naší řady, platí $\max_{x \in \mathbb{R}} |s(x) - s_n(x)| = \frac{1}{n+1}$, řada tedy konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. ■

§88. Ekvivalentní podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci řady je **Bolzano-Cauchyova podmínka**.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in M) \left(\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) \right| < \varepsilon \right).$$

Příklad Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4+x^2}$?

Řešení. Z limitního srovnávacího kritéria plyne (viz §43), že naše řada je (absolutně) konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Označme $a_n(x) = \frac{nx}{n^4+x^2}$ a zkusme opět najít maximum funkce $|a_n(x)|$.

Pro $x \in \mathbb{R}$ je $a_n'(x) = \frac{n(n^4-x^2)}{(n^4+x^2)^2}$. Proto je funkce a_n klesající na $(-\infty, -n^2]$, rostoucí na $[-n^2, n^2]$ a klesající na $[n^2, \infty)$. Protože limita funkce a_n v $-\infty$ i v $+\infty$ je rovna 0, je v bodě $-n^2$ minimum a v bodě n^2 maximum. Je tedy $\max_{x \in \mathbb{R}} |a_n(x)| = a_n(n^2) = 1/2n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2n$ je však divergentní, a tak nelze použít Weierstrassovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci na $\mathbb{R}$.

Když si však uvědomíme, co jsme zjistili o monotonii funkcí a_n, vidíme, že z Weierstrassova kritéria plyne stejnoměrná konvergence naší řady na intervalu $[-T,T]$ pro každé $T \in (0,\infty)$. Zdůvodněme to podrobně:

Je-li $x \in [-T,T]$ a $n > \sqrt{T}$, pak $|a_n(x)| \leq a_n(T)$. Přitom řada $\sum_{n>\sqrt{T}} a_n(T)$ konverguje (řada ze zadání konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy i pro T). Proto řada $\sum_{n>\sqrt{T}} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $[-T,T]$ dle Weierstrassova kritéria. Dle §86 na tomto intervalu konverguje stejnoměrně i řada ze zadání.

To, že řada nekonverguje stejnoměrně na (T,∞) pro žádné $T \in \mathbb{R}$ dokážeme pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky. Je totiž

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}(n^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)n^2}{(n+k)^4+n^4} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{2(n+k)^3} \geq n \cdot \frac{n^2}{2(n+n)^3} = 1/16.$$

Zvolme tedy $\varepsilon = 1/16$. Je-li $n_0 \in \mathbb{N}$, vezměme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq n_0$ a $n^2 > T$, dále položme $p = n$ a $x = n^2$. Pak uvedený výpočet ukazuje, že není splněna Bolzano-Cauchyho podmínka, konvergence tedy není na (T,∞) stejnoměrná. Podobně, nebo s využitím faktu, že funkce a_n jsou liché, vidíme, že řada nekonverguje stejnoměrně na $(-\infty,T)$ pro žádné $T \in \mathbb{R}$.

Shrňme výsledky: Řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, stejnoměrně na každém omezeném intervalu, na žádném neomezeném intervalu konvergence stejnoměrná není. ■

§89. Jednou z postačujících podmínek pro stejnoměrnou konvergenci ne nutně absolutně konvergentních řad je **Dirichletovo kritérium**.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, jestliže jsou splněny následující podmínky:

(i) Částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ jsou stejně omezené na M (tj. existuje takové $K \in \mathbb{R}$, že pro každé $x \in M$ a $N \in \mathbb{N}$ je $|\sum_{n=1}^{N} a_n(x)| \leq K$).

(ii) Posloupnost $\{b_n(x)\}$ je monotónní pro každé $x \in \mathbb{R}$ a stejnoměrně konverguje k 0.

Příklad Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n}\ ?$$

Řešení. Pro $x = 0$ řada konverguje absolutně, pro $x \neq 0$ zřejmě konverguje podle Leibnizova kritéria (že konvergence není absolutní lze zjistit například srovnáním s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pomocí limitního srovnávacího kritéria).

2.2 Kritéria stejnoměrné konvergence

Důkazy vět uvedených v této a následující kapitole jsou technicky náročnější, a nebudeme je zde proto uvádět. Zájemci si je mohou nalistovat např. v [5] a v [6].

Věta 2.7 (Bolzanova–Cauchyho podmínka). *Posloupnost funkcí (f_n) je stejnoměrně konvergentní na množině $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n \in \mathbb{N};\ m, n \geqq n_0)\,(\forall x \in M):\ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Věta 2.8 (Bolzanova–Cauchyho podmínka pro řady funkcí). *Řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na množině $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n \in \mathbb{N};\ n_0 \leqq m < n)\,(\forall x \in M):\ \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

(Porovnejte s větou 1.5.)

Věta 2.9 (Weierstrassovo kritérium). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jsou takové řady, že*

i) *$|f_n(x)| \leqq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in M$,*

ii) *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.*

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M.

(Porovnejte s větou 1.9.)

Příklad 2.10. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$$

stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$, neboť

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in \mathbb{R}):\ \left|\frac{\sin nx}{n^2 + x^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2 + x^2} \leqq \frac{1}{n^2}$$

a reálná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (např. podle integrálního kritéria – viz větu 1.21).

Definice 2.11. Řekneme, že <u>posloupnost funkcí</u> (f_n) <u>je monotónní na množině</u> $M \subset \mathbb{R}$, platí-li jedna z možností:

i) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in M): \ f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$,

ii) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in M): \ f_n(x) \geqq f_{n+1}(x)$.

Definice 2.12. Řekneme, že <u>posloupnost funkcí</u> (f_n) <u>je stejnoměrně omezená na množině</u> $M \subset \mathbb{R}$, platí-li

$$\left(\exists c \in \mathbb{R}^+\right)(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in M): \ |f_n(x)| \leqq c.$$

Věta 2.13 (Dirichletovo kritérium pro řady funkcí). *Nechť (f_n) je monotónní posloupnost funkcí na množině M, pro niž platí $f_n \rightrightarrows 0$ na M, a nechť posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je stejnoměrně omezená na M.*[a] *Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ stejnoměrně konvergentní na M.*

[a] Tzn. $(\exists c \in \mathbb{R}^+)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in M): \ \left|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right| \leqq c.$

(Porovnejte s větou 1.25.)

Příklad 2.14. Díky Dirichletovu kritériu 2.13 víme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

konverguje stejnoměrně na intervalu

$$I_\alpha = \langle \alpha, 2\pi - \alpha \rangle,$$

kde $\alpha \in (0, \pi)$.

(Posloupnost konstantních funkcí $\left(\frac{1}{n}\right)$ je monotónní, $\frac{1}{n} \rightrightarrows 0$ na I_α a posloupnost částečných součtů řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

je stejnoměrně omezená na I_α.[1])

Poznámka 2.15. V posledním příkladu jsme ukázali, že pro jakkoliv malé $\alpha \in (0, \pi)$ je řada funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

stejnoměrně konvergentní na $\langle \alpha, 2\pi - \alpha \rangle$. Lze ukázat, že na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ tato řada sice konverguje, ale konvergence zde není stejnoměrná.

Věta 2.16 (Abelovo kritérium pro řady funkcí). *Nechť (f_n) je monotónní a stejnoměrně omezená posloupnost funkcí na množině M a nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na M. Pak je stejnoměrně konvergentní na množině M i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$.*

(Porovnejte s větou 1.28.)

2.3 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí

Věta 2.17. *Nechť posloupnost funkcí (f_n) stejnoměrně konverguje k funkci f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Jsou-li funkce f_n spojité na I pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, je i funkce f spojitá na I.*

[1] Z tvrzení

$$(\forall x \in I_\alpha)\,(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$

které lze dokázat např. matematickou indukcí, snadno obdržíme

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in I_\alpha) : \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} =: c \in \mathbb{R}^+,$$

což je přesně výše zmíněná stejnoměrná omezenost posloupnosti částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

UKÁZAT

P ř í k l a d   Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ na podintervalech $[0, \pi]$.

Řešení. Z odhadu v §48 plyne, že pro každé $\delta \in (0, \pi)$ a $x \in [\delta, \pi]$ jsou částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ omezené číslem $\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$. Tudíž podle Dirichletova kritéria řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[\delta, \pi]$.

V bodě 0 řada konverguje rovněž, je totiž nulová. Nicméně, nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu $[0, \delta)$. To ověříme opět pomocí Bolzano-Cauchyovy podmínky. Uvažujme $x_k = \frac{\pi}{4k}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$\sum_{n=k}^{2k} \frac{\sin nx_k}{n} = \sum_{n=k}^{2k} \frac{\sin n\frac{\pi}{4k}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=k}^{2k} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Protože $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, je $x_k \in [0, \delta)$ pro dostatečně velká k. Není tedy splněna Bolzano-Cauchyova podmínka. (Rozmyslete si podrobně.) ∎

§90. Další postačující podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci je **Abelovo kritérium.**

Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M a posloupnost $b_n(x)$ je monotónní pro každé $x \in M$ a je stejně omezená na M (tj. existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ a $n \in \mathbb{N}$ je $|b_n(x)| \leq K$). Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M.

P ř í k l a d   Na kterých ~~intervalech konverguje~~ stejnoměrně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{4x - x^2 - 1}{3x^2 + 3} \right)^n \frac{nx^3}{n + x^2} \; ?$$

Řešení. Posloupnost $\frac{1}{n}$ je klesající a má limitu 0 (stejnoměrně na $\mathbb{R}$, protože je to „číselná posloupnost"). Výraz $\frac{4x-x^2-1}{3x^2+3}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ v intervalu $[-1, \frac{1}{3}]$ (ověření přenecháme čtenáři), a tedy částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4x-x^2-1}{3x^2+3})^n$ jsou omezené číslem $\frac{2}{1-1/3} = 3$ (podle postřehu v §89). Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{4x-x^2-1}{3x^2+3})^n$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ podle Dirichletova kritéria z §89.

Zkoumejme nyní posloupnost $\frac{nx^3}{n+x^2} = \frac{x^3}{1+x^2/n}$. Pro $x \geq 0$ je zřejmě neklesající, pro $x \leq 0$ je nerostoucí. Navíc je omezená číslem $|x|^3$ (ve smyslu poznámky z §89 – tímto číslem je shora omezená posloupnost absolutních hodnot). Proto řada, podle

Abelova kritéria, konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu. (Zdůvodněme si to podrobněji: nechť $R > 0$ a $x \in [-R, R]$. Pak $\left|\frac{nx^3}{n+x^2}\right| \leq |x^3| \leq R^3$, a tedy posloupnost $\frac{nx^3}{n+x^2}$ je stejně omezená na intervalu $[-R, R]$. Proto na tomto intervalu můžeme použít Abelovo kritérium.)

Že řada nekonverguje stejnoměrně na žádném okolí $+\infty$ nebo $-\infty$ plyne z toho, že na takových množinách není splněna nutná podmínka konvergence z §85. Je totiž

$$\lim_{x\to\infty} |\tfrac{1}{n}(\tfrac{4x-x^2-1}{3x^2+3})^n \tfrac{nx^3}{n+x^2}| = |\tfrac{1}{n} \cdot (-1/3)^n \cdot (+\infty)| = +\infty,$$

podobně pro $x \to -\infty$. ∎

§91. K vyvrácení stejnoměrnosti konvergence řady funkcí lze někdy použít i nutné podmínky pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí (viz §81-§83) aplikované na posloupnost částečných součtů. Ilustrujme si to dvěma alternativními způsoby řešení části posledního příkladu z §89.

P ř í k l a d   Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ není stejnoměrně konvergentní na žádné množině $M \subset \mathbb{C}$, pro kterou platí $1 \in \overline{M}$.

Řešení. Buď $M \subset \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1, z \neq 1\}$ splňující $1 \in \overline{M}$. (Množina napravo je oborem bodové konvergence, jak jsme se přesvědčili v zmíněném příkladu v §89.)

První způsob. Označme $s_n(z)$ n-tý částečný součet naší řady v bodě z. Pak funkce s_n je spojitá na $\mathbb{C}$, a tedy omezená na kompaktní množině $\overline{M}$. Proto je omezená i na M. Jestliže posloupnost $s_n(x)$ konverguje k funkci $s(x)$ stejnoměrně na M, je funkce $s(x)$ na M omezená podle §82. Z definice stejnoměrné konvergence plyne, že posloupnost $s_n(x)$ je stejně omezená na M. Protože s_n je spojitá funkce pro každé n, je posloupnost funkcí $s_n(x)$ stejně omezená i na $\overline{M}$. Nicméně $1 \in \overline{M}$ a $s_n(1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, tedy $\lim_{n\to\infty} s_n(1) = \infty$. To je spor, proto posloupnost $s_n(x)$ nekonverguje na M stejnoměrně.

Druhý způsob. Využijeme Moore-Osgoodovu větu z §81. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\lim_{z\to1} \frac{z^n}{n} = \frac{1}{n}$. Proto, kdyby řada konvergovala na M stejnoměrně, pak by konvergovala i řada limit, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Ta ovšem diverguje, proto konvergence na M není stejnoměrná. ∎

§92. Na jednom příkladu si předvedeme použití Weierstrassova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí f_n v případě, kdy výpočet maxim ani suprem funkcí $|f_n|$ se pro to nehodí. S podobným problémem jsme se setkali již v závěru §80. Zároveň užijeme Moore-Osgoodovu větu pro případ řady funkcí.

a nechť existuje $K \in \mathbf{R}$ tak, že

$$(36'') \qquad x \in X,\ k \in \mathbf{N} \Rightarrow |g_k(x)| \le K.$$

Konverguje-li řada

$$(37) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

stejnoměrně v X, konverguje v X stejnoměrně i řada (35).

Věta 13.15'. (Symetrická verze Abelova kritéria stejnoměrné konvergence řady.) *Nechť $f_k : X \to \mathbf{C}$ pro každé $k \in \mathbf{N}$ a nechť posloupnosti funkcí $g_k : X \to \mathbf{R}$ a $h_k : X \to \mathbf{R}$ splňují tyto podmínky:*

$$(38') \qquad \text{posloupnost } \left\{\frac{g_k(x)}{h_k(x)}\right\}_{k=1}^{\infty} \text{ je pro každé } x \in X \text{ monotónní}$$

a existují čísla K_1, K_2 tak, že

$$(38'') \qquad x \in X,\ k \in \mathbf{N} \Rightarrow 0 < K_1 \le \frac{g_k(x)}{h_k(x)} \le K_2 < +\infty.$$

Pak řada (35) *konverguje stejnoměrně v X, právě když tam stejnoměrně konverguje řada*

$$(35') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) h_k(x).$$

Definice. Jsou-li A a X množiny a je-li $f_\alpha : X \to \mathbf{C}$ pro každé $\alpha \in A$, říkáme, že funkce f_α, $\alpha \in A$, jsou **stejně omezené** v X, existuje-li $K \in \mathbf{R}$ tak, že nerovnost $|f_\alpha(x)| \le K$ platí pro všechna $x \in X$ a všechna $\alpha \in A$.

Poznámka 13.7. Ve V.13.14 (resp. V.13.15) tedy předpokládáme stejnou omezenost v X částečných součtů $\sum_{k=1}^{n} f_k$ řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (resp. funkcí g_k). Podmínku (38'') věty 13.14' bychom mohli popsat jako „stejnou omezenost funkcí g_k/h_k zdola i shora kladnými konstantami". □

Podobně jako je tomu u číselných řad, užívá se Abelovo kritérium (a to hlavně jeho symetrická verze) ke zjednodušení členů řad, zatímco Dirichletovo kritérium se aplikuje zpravidla až na řadu dostatečně zjednodušenou.

Příklad 13.7. Pro každé $\alpha > 1$ konverguje podle V.13.13 jak řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k!x)}{k^\alpha},$$

tak i řada příslušných absolutních hodnot stejnoměrně v celém $\mathbf{R}$; její majorantou je konvergentní číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$.

Příklad 13.8. Řada

$$(39) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad \text{kde } f_k(x) := x^k e^{-kx} \text{ pro všechna } x \in \mathbf{R},$$

diverguje pro všechna $x \in \mathbf{R}_-$, konverguje pro všechna $x \in \mathbf{R}_+^0$. Protože pro každé $x \in \mathbf{R}$ je $f_k'(x) = kx^{k-1}(1-x)$, protože se tato derivace v $\mathbf{R}_+$ rovná 0, právě když je $x = 1$, a protože $f_k(0) = f_k(+\infty-) = 0$, $f_k(1) = e^{-k}$, nabývá nezáporná funkce $f_k|\mathbf{R}_+^0$ v bodě 1 svého maxima. (Sr. s V.8.2.)

Konvergentní řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ je tedy majorantou v $\mathbf{R}_+^0$ řady (39), která tam proto podle srovnávacího kritéria konverguje stejnoměrně.

Příklad 13.9°. Porovnejme stejnoměrnost konvergence řad o členech

$$(40) \qquad f_k(x) := \frac{x}{1+k^2x^2} \quad \text{a} \quad g_k(x) := \frac{x^2}{1+k^2x^2},$$

kde $k \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}$. Obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(0)$ jsou nulové, tedy konvergentní; je-li $x \ne 0$, je

$$(41) \qquad |f_k(x)| \le \frac{|x|}{k^2x^2} = \frac{1}{k^2|x|} \quad \text{a} \quad 0 \le g_k(x) \le \frac{x^2}{k^2x^2} \le \frac{1}{k^2}.$$

Z toho plyne, že

$$(42) \qquad \textit{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \textit{ konverguje v } \mathbf{R} \textit{ bodově, řada } \sum_{k=1}^{\infty} g_k \textit{ stejnoměrně.}$$

Z prvního odhadu je zároveň patrné, že $|x| \ge \delta > 0 \Rightarrow |f_k(x)| \le 1/k^2\delta$, takže (podle V.13.13)

$$(42) \qquad \textit{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \textit{ konverguje stejnoměrně v } \mathbf{R} - U(0,\delta) \textit{ pro každé } \delta \in \mathbf{R}_+.$$

Ukažme, že řada

$$(43) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k \textit{ nekonverguje stejnoměrně v žádném } P^+(0) \textit{ a v žádném } P^-(0);$$

vzhledem k lichosti funkcí f_k stačí nestejnoměrnost konvergence dokázat jen pro intervaly tvaru $(0,\delta)$, kde $\delta \in \mathbf{R}_+$. K tomu stačí ověřit *neplatnost* příslušné BC podmínky, tj. *platnost* její negace, která zní:

(44) *Existuje $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ tak, že pro každé $n_0 \in \mathbf{N}$ existuje $n > n_0$, $p \in \mathbf{N}$ a $x \in (0,\delta)$ tak, že $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \ge \varepsilon$.*

V našem případě však platí dokonce toto silnější a konkrétnější tvrzení:

$$n > \frac{1}{2\delta} \Rightarrow \frac{1}{2n} \in (0,\delta), \quad \sum_{k=n+1}^{2n} f_k\Big(\frac{1}{2n}\Big) \geq \frac{1}{4}. \tag{45}$$

Z nerovnosti $k \leq 2n$ totiž plyne, že $k/2n \leq 1$, takže $1 + (k/2n)^2 \leq 2$ a

$$f_k\Big(\frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2n(1+(k/2n)^2)} \geq \frac{1}{4n}.$$

Résumé. Přes podobnost funkcí (40) se obory stejnoměrné konvergence příslušných řad podstatně liší: *Druhá řada konverguje stejnoměrně v* $\mathbf{R}$, *první konverguje stejnoměrně v intervalu* $I \subset \mathbf{R}$, *právě když není* $0 \in \overline{I}$, *takže její konvergence je lokálně stejnoměrná v* $\mathbf{R} - \{0\}$ *a nestejnoměrná v každém* $P^+(0)$ *i v každém* $P^-(0)$.

Podstatný rozdíl v chování obou řad způsobil faktor x, kterým se $g_k(x)$ liší od $f_k(x)$ a který podstatně zmenšil hodnoty funkcí $g_k(x)$ v blízkosti počátku.

Poznámka 13.8. Jsou-li splněny předpoklady srovnávacího kritéria (V.13.13), konvergují obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ stejnoměrně; někdy se v takové situaci říká, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje **absolutně stejnoměrně**. Poznamenejme, že v tvrzení V.13.13 by stačilo uvést, že stejnoměrně konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$, protože stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ pak již zaručuje BC kritérium.

Stejnoměrně konvergující řadu, pro niž řada příslušných absolutních hodnot diverguje, lze sestrojit velmi snadno. Čtenář, který by nebyl spokojen s neabsolutně konvergentní řadou o členech $f_k := (-1)^k/k$ (ačkoli je to zcela právoplatný příklad, protože konvergentní řady s konstantními členy nejsou „zakázány" a konvergují samozřejmě stejnoměrně), může vyšetřit např. řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(x), \quad \text{kde } g_k(x) := \frac{\operatorname{arctg}(1+k^2x^2)}{k},$$

která podle Abelova kritéria konverguje stejnoměrně v $\mathbf{R}$, zatímco řada $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ příslušných absolutních hodnot všude v $\mathbf{R}$ diverguje, protože pro všechna $x \in \mathbf{R}$ je $g_k(x) \geq g_k(0) \geq \pi/4k$.

Může se však stát, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ na nějaké množině X *konverguje absolutně i stejnoměrně, nikoli však absolutně stejnoměrně*; ukazuje to tento příklad:

Buďte f_k funkce z Př. 13.9, položme

$$h_{2k-1} := f_k, \quad h_{2k} := -f_k \quad \text{pro každé } k \in \mathbf{N} \tag{46}$$

a s_n resp. σ_n nechť je n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ resp. $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|$. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ je pak

$$s_{2n-1}(x) = f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad s_{2n} \equiv 0, \tag{47}$$

a protože nerovnosti $|f_n(x)| \leq f_n(1/n) \leq 1/2n$ platí pro všechna $x \in \mathbf{R}$ a všechna $n \in \mathbf{N}$, je $s_n \to 0$ stejnoměrně v $\mathbf{R}$.

Příklad lze ještě poněkud zobecnit.

Příklad 13.x.
Zjistěme stejnoměrnou konvergenci následující řady s parametrem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x|^{\alpha} e^{-k|x|};\ x \in \mathbf{R};\ \alpha \geq 0;$$

Vzhledem k tomu, že jde o geometrickou řadu s kvocientem $e^{-|x|}$, dokážeme určit součet.

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x|^{\alpha} e^{-k|x|} = |x|^{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k|x|} = |x|^{\alpha} \cdot \frac{e^{-|x|}}{1-e^{-|x|}} = \frac{|x|^{\alpha}}{e^{|x|}-1};\ x \neq 0;$$

$S(0) = 0;\ \alpha > 0;\ S(0) = +\infty;\ \alpha = 0;$

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha}}{e^{|x|}-1} \overset{Lop}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\alpha|x|^{\alpha-1}}{e^{|x|}} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ +\infty & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Pro $\alpha \in \langle 0;1\rangle$ není funkce $S(x)$ spojitá v 0, tudíž konvergence není stejnoměrná v žádném $U_{\delta}(0)$ (pro $\alpha = 0, x = 0$ řada dokonce diverguje)

Položme: $f_k(x) = |x|^{\alpha} e^{-k|x|};\ f_k(0) = 0$ pro $\alpha > 0;\ f_k(0) = 1$ pro $\alpha = 0;$

$$f_k'(x) = \left(|x|^{\alpha} e^{-k|x|}\right)' = \alpha|x|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} x\, e^{-k|x|} - k|x|^{\alpha} e^{-k|x|} \operatorname{sgn} x = |x|^{\alpha-1} e^{-k|x|} \operatorname{sgn} x (\alpha - k|x|)$$

Funkce je rostoucí v intervalech: $(-\infty;-\frac{\alpha}{k})$, $(0;\frac{\alpha}{k})$, klesající v intervalech:

$(-\frac{\alpha}{k};0)$, $(\frac{\alpha}{k};+\infty)$. V bodech: $-\frac{\alpha}{k};\ 0;\ \frac{\alpha}{k}$ jsou lokální extrémy ($\alpha > 0$).

$f_k(\pm\frac{\alpha}{k}) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{\alpha} e^{-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \frac{1}{k^{\alpha}}$; lokální maximum;

$f_k(0) = 0$; lokální minimum ($\alpha > 0$).

Je-li $\alpha = 0$, má funkce lokální extrém pouze v 0 (lokální maximum). $f_k(0) = 1$;

Je-li $\alpha > 1$, platí: $f_{k+}'(0) = f_{k-}'(0) = f_k'(0) = 0$; $|f_k(x)| \leq \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \frac{1}{k^{\alpha}}$; přičemž řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ je konvergentní pro $\alpha > 1$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je tedy stejnoměrně konvergentní v celém $\mathbf{R}$.

Je-li $\alpha = 1$, platí: $f_{k+}'(0) = 1$; $f_{k-}'(0) = -1$; derivace v 0 tedy neexistuje. $|f_k(x)| \leq \frac{1}{ke}$; přičemž řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je divergentní. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je tedy stejnoměrně konvergentní v intervalech: $(-\infty;-\delta\rangle \cup \langle\delta;+\infty)$, konvergence není stejnoměrná v žádném $U_{\delta}(0)$.

Je-li $0 < \alpha < 1$, platí: $f_{k+}'(0) = +\infty$; $f_{k-}'(0) = -\infty$; derivace v 0 tedy neexistuje.
$|f_k(x)| \leq \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \frac{1}{k^{\alpha}}$; přičemž řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ je divergentní pro $0 < \alpha \leq 1$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je tedy stejnoměrně konvergentní v intervalech: $(-\infty;-\delta\rangle \cup \langle\delta;+\infty)$, konvergence není stejnoměrná v žádném $U_{\delta}(0)$. (to se již snadno odvodí, $k > k_0 \wedge |x| \geq \delta \Rightarrow |f_k(x)| \leq \delta^{\alpha} e^{-k\delta}$)

Závěr:

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} |x|^{\alpha} e^{-k|x|}$ je stejnoměrně konvergentní v celém $\mathbf{R}$ pro $\alpha > 1$.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} |x|^{\alpha} e^{-k|x|}$ je stejnoměrně konvergentní v intervalech $(-\infty;-\delta\rangle \cup \langle\delta;+\infty)$ a není stejnoměrná v žádném $U_{\delta}(0)$ pro $0 < \alpha \leq 1$. Jinými slovy: Konvergence je stejnoměrná v každém intervalu $I \subset \mathbf{R}$, pro který platí: $0 \notin cl\, I$.
Pro $\alpha = 0$ řada v 0 diverguje, v $P_{\delta}(0)$ konverguje nestejnoměrně, v intervalech $(-\infty;-\delta\rangle \cup \langle\delta;+\infty)$ konverguje stejnoměrně.

Příklad 13.x.
Zjistěme stejnoměrnou konvergenci následujících řad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k e^{-k|x|};\quad \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} e^{-kx^2};\ x \in \mathbf{R};$$

Položme: $f_k(x) = x^k e^{-k|x|}$; $g_k(x) = x^{2k} e^{-kx^2}$; ($g_k$ - sudé funkce, f_k je sudá funkce pro k sudé, lichá funkce pro k liché; $k \in \mathbf{N}$.

$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} g_k(x) = \lim_{x\to-\infty} g_k(x) = 0$;

$f_k'(x) = kx^{k-1} e^{-k|x|} - kx^k e^{-k|x|} \operatorname{sgn} x = kx^{k-1} e^{-k|x|}(1-|x|)$;

Derivace nabývá nulové hodnoty v bodech $-1;\ 0;\ 1$; je-li $k \geq 2$.

Předpokládejme, že k je sudé (tj. $2|k$ tj. $k \overset{2}{=} 0$).

Funkce f_k je rostoucí v intervalech: $(-\infty;-1)$; $(0;1)$, klesající v intervalech: $(-1;0)$; $(1;+\infty)$,
$f_k(-1) = f_k(1) = e^{-k}$ lokální maximum; $f_k(0) = 0$ lokální minimum
$0 \leq f_k(x) \leq e^{-k}$;

Předpokládejme, že k je liché (tj. $\neg(2|k)$ tj. $k \overset{2}{=} 1$).

Funkce f_k je rostoucí v intervalu: $(-1;1)$, klesající v intervalech: $(-\infty;-1)$; $(1;+\infty)$
$f_k(-1) = -e^{-k}$ lokální minimum; $f_k(1) = e^{-k}$ lokální maximum
$-e^{-k} \leq f_k(x) \leq e^{-k}$;

Platí: $|f_k(x)| \leq e^{-k}\ \forall k \in \mathbf{N}$; řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ konverguje, tedy první řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v celém $\mathbf{R}$.

$g_k'(x) = 2kx^{2k-1} e^{-kx^2} - 2kx^{2k+1} e^{-kx^2} = 2kx^{2k-1} e^{-kx^2}(1-x^2)$;

Derivace nabývá nulové hodnoty v bodech $-1;\ 0;\ 1$; je-li $k \geq 2$.

Funkce g_k je rostoucí v intervalech: $(-\infty;-1)$; $(0;1)$, klesající v intervalech: $(-1;0)$; $(1;+\infty)$,
$g_k(-1) = g_k(1) = e^{-k}$ lokální maximum; $g_k(0) = 0$ lokální minimum
$0 \le g_k(x) \le e^{-k}$;

Platí: $|g_k(x)| \le e^{-k}$; řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ konverguje, tedy druhá řada $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v celém $\mathbf{R}$.
Výsledek: Obě řady konvergují stejnoměrně v celém $\mathbf{R}$.

Příklad 13.x.
Zjistěme stejnoměrnou konvergenci následující řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x|^{\alpha} \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+1}; \quad \alpha \ge 0; \; x \in \mathbf{R};$$

Napřed provedeme odhady, pak použijeme srovnávací kriterium. Platí:

$$e^{2kx}+1 \ge e^{2kx} \wedge e^{2kx}+1 \ge 1 \Rightarrow \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+1} \le e^{-kx} \wedge \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+1} \le e^{kx} \Rightarrow \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+1} \le e^{-k|x|};$$

$$x \ge 0 \Rightarrow e^{2kx}+1 \le 2e^{2kx} \Rightarrow \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+1} \ge \frac{e^{kx}}{2e^{2kx}} = \frac{1}{2}e^{-kx} = \frac{1}{2}e^{-k|x|};$$

$$x \le 0 \Rightarrow e^{2kx}+1 \le 2 \Rightarrow \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+1} \ge \frac{e^{kx}}{2} = \frac{1}{2}e^{-k|x|};$$

Dostali jsme odhad: $\frac{1}{2}e^{-k|x|} \le \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+1} \le e^{-k|x|} \quad \forall x \in \mathbf{R}$;

Poznamenejme ještě, že funkce $\frac{e^{kx}}{e^{2kx}+1}$ je sudá, neboť platí: $\frac{e^{-kx}}{e^{-2kx}+1} \cdot \frac{e^{2kx}}{e^{2kx}} = \frac{e^{kx}}{1+e^{2kx}}$;
Konverguje-li řada (z příkladu 13.x.) stejnoměrně, konverguje stejnoměrně i tato řada. Pro $\alpha > 1$ konverguje stejnoměrně v celém $\mathbf{R}$. Pro $0 < \alpha \le 1$ není konvergence stejnoměrná v žádném $U_\delta(0)$ (limitní funkce není v 0 spojitá).

Příklad 13.x.
Zjistěme stejnoměrnou konvergenci následující řady:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k}; \right\} x \ge 1$$

Napřed provedeme odhady, pak použijeme srovnávací kriterium. Platí: $\ln(1+kx) \le kx$, dále $0 \le \ln(1+kx)$, je-li $x \ge 0$.

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx}{kx^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{k-1}} = \frac{x}{x-1}; \; x > 1;$$

Jde o součet geometrické řady s kvocientem $\frac{1}{x}$. Platí: $x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$

Je-li $x = 1$, máme: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+k)}{k} = +\infty$, což je divergentní řada, pro libovolné $x > 1$ je řada konvergentní.

Je-li $x > 1+\delta$, $\delta > 0$, platí: $0 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{k-1}} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}} = \frac{1+\delta}{\delta}$;

Z věty 13.x plyne, že na libovolném intervalu $\langle 1+\delta; +\infty)$, $\delta > 0$ je konvergence stejnoměrná.

V libovolném $P(1)$ konvergence není stejnoměrná.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}} \qquad (-1, \infty)$$

Σ $\forall x$ dle Leibniz

• Dirichlet

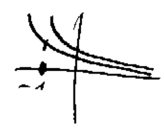
$$g_n = (-1)^n \qquad f_n = \frac{1}{x+n}$$

s. om. č. součty $\qquad$ monot. $\forall x$

$$f_n \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0$$

$$f_n \overset{?}{\rightrightarrows} 0$$



$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left|\frac{1}{x+n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = \underline{\underline{0}}$$

v $x = -1$

Konverguje stejnom. na $(-1, \infty)$

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} e^{-\frac{x^2}{n}}}$$

Dir: $(-1)^n$ s. om. č. s.

$\frac{1}{n+(-1)^n} \rightrightarrows 0$ monot. ? Ne

$\left.\right\} \sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \rightrightarrows$

o ale pro sudé a liché zvlášť ano (taky z Leibnize)

$\to$ 2 řady a to už konvergují (a stejnoměrně)

Ábel $e^{-\frac{x^2}{n}}$ omezená

$\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \rightrightarrows$ $\left.\right\}$ $\sum \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, n \cdot \frac{\sin^2 n}{n^2+x^2}}$$

Dirichlet $(-1)^n$ s. om. č. s.

$n \cdot \frac{\cancel{}}{n^2+x^2}$ je monotónní

$\frac{n}{n^2+x^2} \rightrightarrows 0$

neb $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{n}{n^2+x^2}\right| = \lim \frac{n}{n^2} = 0$

$\left.\right\} \sum (-1)^n \frac{n}{n^2+x^2} \rightrightarrows$

Ábel $\sin^2 n$ je om. $\left.\right\}$ $\sum \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$