9. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Bodový součet řady zobrazení $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je bodová limita posloupnosti částečných součtů $\sum_{n=1}^{m} f_n$.

Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně* na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže posloupnost částečných součtů konverguje stejnoměrně, tedy

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \forall x \in M \forall n \geq n_0 : \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Značíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$.

Věta 2 (Kritéria stejnoměrné konvergence)**.**

1. Jestliže existuje stejnoměrně konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ na M taková, že $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ (pro každé $n \in \mathbb{N}$, $x \in M$), pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně.
2. Jestliže $|f_n(x)| \leq c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně.
3. Nechť $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ jsou posloupnost funkcí na intervalu I. Nechť $\{f_n(x)\}$ je monotónní pro každé $x \in I$ a nechť platí jedna z podmínek

   (D) f_n konverguje stejnoměrně k 0 a g_n má stejně omezené částečné součty.

   (A) $\{f_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na I.

   Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na I.

Věta 3 (Bolzano-Cauchy)**.** Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \forall x \in M : \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

nebo také

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \forall x \in M \forall m > k > n_0 : \left| \sum_{n=k}^{m} f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

Věta 4 (Nutná podmínka)**.** Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, pak funkce $f_n(x)$ na M konvergují stejnoměrně k 0.

Postup:

1. Kde řada konverguje? (bodově)
2. Kde konverguje stejnoměrně?
    - Známe součet? - jako u posloupností
    - Existuje majoranta?
    - Abel, Dirichlet
3. Případné vyloučení stejnoměrné konvergence

Příklady

Určete, zda a kde řada konverguje stejnoměrně, a příp. kde konverguje stejnoměrně

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^{\alpha}} \qquad \alpha > 1$$
   Hint: majoranta
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$$
   Hint: majoranta
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$
   Hint: Dirichlet
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} e^{-x^2/n}$$
   Hint: Abel + Dirichlet
5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$$
   Hint: majoranta
6. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \frac{\sin^2 n}{n^2+x^2}$$
   Hint: Abel + Dirichlet
7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}$$
8. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{x}{n}$$
   Hint: Dirichlet
9. $$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$
10. $$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$$
11. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$
12. $$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} e^{-nx^2}$$
13. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \qquad x \geq 1$$