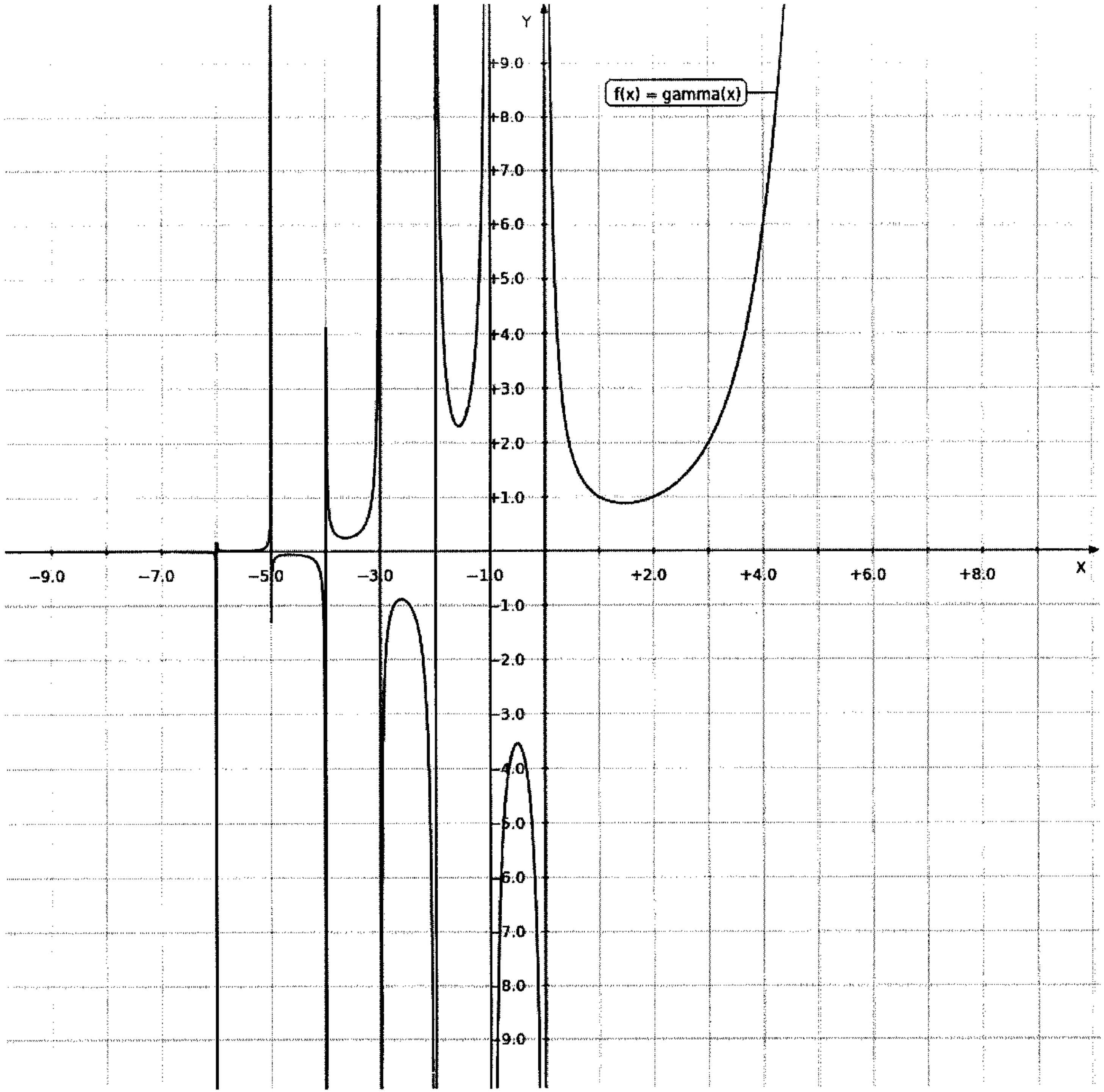

f(x) = gamma(x)
Y
X
+9.0
+8.0
+7.0
+6.0
+5.0
+4.0
+3.0
+2.0
+1.0
−1.0
−2.0
−3.0
−4.0
−5.0
−6.0
−7.0
−8.0
−9.0
−9.0
−7.0
−5.0
−3.0
−1.0
+2.0
+4.0
+6.0
+8.0

(1) $$2\int_0^\infty t^{2x-1} e^{-t^2}\,dt = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\,du = \Gamma(x)$$

$$u = t^2 \qquad u^{1/2} = t$$

$$du = 2t\,dt$$

$$t^{2(x-1)} = u^{x-1}$$

(2) $$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u}\right)^{x-1} du = +\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt = \underline{\Gamma(x)}$$

$$\ln \frac{1}{u} = t \qquad\qquad u \quad 0 \quad 1$$

$$u = e^{-t} \qquad\qquad t \quad \infty \quad 0$$

$$du = -e^{-t}\,dt$$

(3) $$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt = -\int_1^0 \left(\frac{1}{u}-1\right)^{x-1} u^{x+y} \frac{1}{u^2}\,du =$$

$$u = \frac{1}{1+t}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1-u}{u}\right)^{x-1} u^{x+y-2}\,du =$$

$$\frac{1}{u} - 1 = t$$

$$-\frac{1}{u^2}\,du = dt$$

$$= \int_0^1 (1-u)^{x-1} u^{x+y-2-x+1}\,du =$$

$$= \int_0^1 u^{y-1} (1-u)^{x-1}\,du = B(y,x)$$

$$= \underline{B(x,y)}$$

(4) $$\int_0^{\pi/2} 2\cos^{2x-1}\varphi \, \sin^{2y-1}\varphi \, d\varphi =$$

$u = \sin^2\varphi$ $\qquad\qquad$ $\cos^{2x}\varphi = (1-\sin^2\varphi)^x$

$du = 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$

$$= \int_0^1 (1-u)^{x} \cdot u^{y}(1-u)^{-1} \cdot u^{-1}\, du =$$

$$= \int_0^1 (1-u)^{x-1}\, u^{y-1}\, dy = \underline{\underline{B(y,x)}}$$

1 **Příklad.** Vyjádřeme hodnotu $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ pomocí funkcí Γ a B.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = t^{\frac12} & 0 \to 0 \\ \mathrm{d}x = \frac12 t^{-\frac12}\mathrm{d}t & 1 \to 1 \end{matrix} \right| = \frac12 \int\limits_0^1 t^{-\frac12}\cdot(1-t)^{\frac12}\,\mathrm{d}t = \frac12 \int\limits_0^1 t^{\frac12-1}\cdot(1-t)^{\frac32-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac12 \cdot \mathrm{B}\left(\frac12, \frac32\right) = \frac12 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac12\right)\cdot\Gamma\left(\frac32\right)}{\Gamma\left(\frac12+\frac32\right)} = \frac12 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac12\right)\cdot\Gamma\left(\frac12+1\right)}{\Gamma(2)} = \frac14 \cdot \left(\Gamma\left(\frac12\right)\right)^2.$$

Jelikož $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ je roven jedné čtvrtině obsahu kruhu o poloměru 1, dostáváme rovnost $\frac{\pi}{4} = \frac14 \cdot \left(\Gamma\left(\frac12\right)\right)^2$. Odsud ihned plyne $\Gamma\left(\frac12\right) = \sqrt{\pi}$.

Funkce Γ a B nejsou elementární funkce. Hodnoty těchto funkcí je přesto možno určit v libovolném bodě s libovolnou, předem danou, přesností. Vzhledem k vlastnostem funkcí B a Γ stačí znát hodnoty funkce Γ na libovolném intervalu délky 1. Nejčastěji je možno v literatuře nalézt tabelované hodnoty funkce gama na intervalu $\langle 1, 2\rangle$.

Na závěr si vyjádříme hodnoty tří určitých integrálů pomocí funkcí gama a beta.

2 **Příklad.** Určeme $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Provedeme-li substituci $x = \sqrt{t}$, dostaneme

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = t^{\frac12} & 0 \to 0 \\ \mathrm{d}x = \frac12 t^{-\frac12}\mathrm{d}t & \infty \to \infty \end{matrix} \right| = \frac12 \int\limits_0^\infty t^{\frac12-1}\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac12 \cdot \Gamma\left(\frac12\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3 **Příklad.** Určeme $\int\limits_0^\infty x^4 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Provedeme substituci $x = \sqrt{t}$ a dostaneme

$$\int\limits_0^\infty x^4 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = t^{\frac12} & 0 \to 0 \\ \mathrm{d}x = \frac12 t^{-\frac12}\mathrm{d}t & \infty \to \infty \end{matrix} \right| = \frac12 \int\limits_0^\infty t^{2-\frac12}\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac12 \int\limits_0^\infty t^{\frac52-1}\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac12 \cdot \Gamma\left(\frac52\right) = \frac12 \cdot \Gamma\left(\frac32+1\right) = \frac12 \cdot \frac32 \cdot \Gamma\left(\frac12+1\right) = \frac12 \cdot \frac32 \cdot \frac12 \cdot \Gamma\left(\frac12\right) = \frac38\sqrt{\pi}.$$

4 **Příklad.** Určeme $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{16-x^4}}\,\mathrm{d}x$.

Hodnotu integrálu vyjádříme pomocí funkce beta. Použijeme substituci $x = 2t^{\frac14}$. Dostaneme

$$\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{16-x^4}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = 2t^{\frac14} & 0 \to 0 \\ \mathrm{d}x = \frac12 t^{-\frac34}\mathrm{d}t & 2 \to 1 \end{matrix} \right| = \frac18 \int\limits_0^1 t^{-\frac34}\cdot(1-t)^{-\frac12}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac18 \int\limits_0^1 t^{\frac14-1}\cdot(1-t)^{\frac12-1}\,\mathrm{d}t = \frac18 \cdot \mathrm{B}\left(\frac14, \frac12\right).$$

(5.) $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{-\ln u}} = -\int_\infty^0 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = +\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt = \underline{\underline{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}$

$x - 1 = -1/2$

$t = -\ln u$

$-t = \ln u$

$e^{-t} = u$

$-e^{-t}\, dt = du$

u	0	1
t	∞	0

(6.) $\int_0^\infty u^m e^{-au^n}\, du = \int_0^\infty \underbrace{\left(a^{-1/n}\right)^m} \cdot y^{\frac{m}{n}} e^{-y} \cdot \underbrace{\frac{1}{a^{1/n}}} \cdot \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}\, dy$

$a \neq 0$ $\quad -au^n = -y$

$a > 0$ $\quad anu^{n-1}\,du = dy$

$m, n > 0$

$u^n = \frac{y}{a}$

$u = \left(\frac{y}{a}\right)^{1/n}$

$= \int_0^\infty a^{-\frac{m}{n}-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1} \cdot e^{-y}\, dy$

$= \int_0^\infty a^{-\frac{m+1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{m-n+1}{n}} \cdot e^{-y}\, dy$

$= \underline{\underline{a^{-\frac{m+1}{n}} \cdot \frac{1}{n}\, \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}}$

(7.) $\int_a^\infty e^{2au - u^2}\, du = \int_a^\infty e^{-(x-a)^2 + a^2} = \int_0^\infty e^{-t^2 + a^2}\, dt$

$t = (x-a)$

$dt = dx$

$= e^{a^2} \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \underline{\underline{e^{a^2} \cdot \frac{1}{2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3-1} x \cdot \cos^{3-1} x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3+3}{2})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2!} = \frac{\pi}{16};$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5-1} x \cdot \cos^{3-1} x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{5+3}{2})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{3!} = \frac{1}{32}\pi;$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \cos^6 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5-1} x \cdot \cos^{7-1} x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\cdot\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{5+7}{2})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\cdot\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{5!} = \frac{3\pi}{512};$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}-1} x \cos^{\frac{1}{2}-1} x\,dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\cdot\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\frac{\pi\sqrt{2}}{1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}};$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{(1+x)}\,dx = \Gamma(\tfrac{1}{2})\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi} = \pi;$

(Př. 17.6. $a=1;\ p=\frac{1}{2};\ q=\frac{1}{2}$), jiný výpočet:

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi;$ (substituce: $x = y^2;\ dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$)

f) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}}\,dx = \frac{1}{1^{\frac{3}{4}}}\mathrm{B}(\tfrac{5}{4};\tfrac{3}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4}+\frac{3}{4})} = \frac{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4};$

(Př. 17.6. $a=1;\ p=\frac{5}{4};\ q=\frac{3}{4}$),

g) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}\,dx = \mathrm{B}(\tfrac{3}{2};\tfrac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{\pi}{8};$

Použili jsme výsledku z příkladu 17.1., 17.1a, 17.6., důsledku věty 17.2. Výpočet pomocí Gama a Beta funkce byl jednoduchý, klasický výpočet by byl zdlouhavý.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}\,dx = \pi;\quad \int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{\pi}{8};}$$

Příklad 17.8.

Vypočtěme integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x^n}\,dx;\quad 0<b<n;\ n\in\mathbf{N};$$

Je celkem zřejmé, že integrál má konečnou hodnotu pro $b\in(0;n)$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{x^{b-n}}{1+x^n}nx^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{b}{n}-1}}{1+y}\,dy = \frac{1}{n}\mathrm{B}(\tfrac{b}{n};1-\tfrac{b}{n}) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi b}{n}};$$

(substituce: $y = x^n;\ dy = nx^{n-1}dx$; věta 17.2)

Výsledek:

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x^{b-1}}{1+x^n}dx=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi b}{n}};\ 0<b<n;\ n\in\mathbf{N};}$$

Tento příklad je zobecnění věty 17.2. ($n=1$)

Příklad 17.8a.

Položíme-li v předchozím příkladě $n=2,\ b=1$, dostaneme:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2};\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi;\ \text{(viz. Př. 8.x.)}$$

Položíme-li v předchozím příkladě $n=4,\ b=1$, dostaneme:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4};\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=2\cdot\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2};\ \text{(viz. Př. 8.x.)}$$

Položíme-li v předchozím příkladě $n=6,\ b=1$, dostaneme:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^6}dx=\frac{\pi}{6\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3};\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^6}dx=2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3};\ \text{(viz. Př. 8.x.)}$$

Položíme-li v předchozím příkladě $n=4,\ b=3$, dostaneme:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{4\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4};\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=2\cdot\frac{\pi}{4\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2};\ \text{(viz. Př. 8.x.)}$$

(uvažme, že se jedná o sudé funkce)

Příklad 17.9.

Vypočtěme integrál:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{nx}}dx;\ 0<a<n;\ n\in\mathbf{N};$$

Je celkem zřejmé, že integrál má konečnou hodnotu pro $a\in(0;n)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{nx}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(a-1)x}}{1+e^{nx}}e^xdx=\int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{1+y^n}dy=\frac{1}{n}\mathrm{B}(\tfrac{a}{n};1-\tfrac{a}{n})=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi a}{n}};$$

(substituce: $y=e^x$; $dy=e^xdx$; dále výsledek příkladu 17.8.)

Výsledek:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{nx}}dx=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi a}{n}};\ 0<a<n;\ n\in\mathbf{N};}$$

Příklad 17.10.

Vypočtěme integrál:

$$\int_0^{\delta}x^{p-1}(\delta-x)^{q-1}dx;\ p,q,\delta>0;$$

$$\int_0^{\delta}x^{p-1}(\delta-x)^{q-1}dx=\int_0^1\delta^{p-1}v^{p-1}\delta^{q-1}(1-v)^{q-1}\delta dv=\delta^{p+q-1}\int_0^1v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv=\delta^{p+q-1}\mathrm{B}(p;q);$$

$$(6) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u \quad \cos^{2m+1} u \, du = \frac{1}{2} B(n+1, m+1)$$

$$2n+1 = 2x-1$$

$$2m+1 = 2y-1$$

$$2n+2 = 2x$$

$$n+1 = x$$

$$m+1 = y$$

$$(12) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u \, du = \frac{1}{2} B\left(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$2n = 2x-1$$

$$0 = 2y-1$$

$$2n+1 = 2x$$

$$n+\frac{1}{2} = x$$

$$\frac{1}{2} = y$$

(1) $\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$

(a) $\sqrt[n]{n!} \approx \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

$$\lim \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}}}_{a_n} = 1$$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \le a_n \le \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}} \to 1$$

ze známé limity $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}} \to 1$

tedy $\lim a_n = 1$

pak $$\lim \frac{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}}{\frac{n}{e}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}} = \underline{\underline{1}}$$

(2) $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

$$\lim \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}}{\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}} \overset{\text{VOAL}}{=}$$

$$= \lim \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}} \cdot \lim \frac{4^n}{4^n} \frac{n^{2n}}{e^{2n}} \cdot \frac{e^{2n}}{n^{2n}} = \underline{\underline{1 \cdot 1}}$$