7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Funkce Gama je definována rovností

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t, \qquad x \in (0, \infty).$$

Funkce Beta je definována rovností

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t, \qquad x, y \in (0, \infty).$$

Věta 2 (Vlastnosti Γ)**.**

1. $\Gamma(x) > 0$
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. $\Gamma(1) = 1$
4. $\Gamma(n+1) = n!$
5. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Věta 3 (Vlastnosti B)**.**

1. $B(x, y) > 0$
2. $B(x, y) = B(y, x)$
3. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
4. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, $x \in (0, 1)$.

Platí:

1. $$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u}\right)^{x-1} \mathrm{d}u$$
2. $$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \mathrm{d}t$$
3. $$B(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos\varphi)^{2x-1}(\sin\varphi)^{2y-1} \mathrm{d}\varphi$$

Věta 4 (Stirlingův vzorec)**.**

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

speciálně

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Příklady

Ověřte:

1.
$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty t^{2x-1}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Převeďte na funkci Γ nebo B:

1.
$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$$

2.
$$\int_0^\infty u^4 e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

3.
$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 u \cos^2 u \,\mathrm{d}u$$

4.
$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{16-u^4}}\mathrm{d}u$$

5.
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{-\ln u}}$$

6.
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u \cos^{2m+1} u\mathrm{d}u$$

7.
$$\int_0^\infty u^m e^{-au^n}\mathrm{d}u, \qquad x, m, n > 0$$

8.
$$\int_0^\infty \frac{u^{b-1}}{1+u^n}\mathrm{d}u \qquad 0 < b < n\,, n \in \mathbb{N}$$

9.
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+u^4}\mathrm{d}u \qquad 0 < b < n\,, n \in \mathbb{N}$$

10.
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{bu}}{1+e^{nu}}\mathrm{d}u \qquad 0 < b < n\,, n \in \mathbb{N}$$

11.
$$\int_a^\infty e^{2au-u^2}\mathrm{d}u$$

Hint: $2au - u^2 = -(u-a)^2 + a^2$

12.
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u\mathrm{d}u$$

13.
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\mathrm{tg}\ u}\,\mathrm{d}u$$

Pomocí Stirlingova vzorce ukažte, že

1.
$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$$

Hint: Nepadněte do pasti částečného limitění

2.
$$\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$