Uvědomíme-li si konečně, že F je lichá funkce, dostáváme

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx = \operatorname{sign} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+|a|), \quad a \in E_1 .$$

6,20. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx = \operatorname{sign} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+|a|)$ pro $a \in E_1$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$, označte jej $F(a)$.

2/ Použijte výsledku cvičení 6,19 a substituce $\operatorname{tg} x = t$.

3/ Ukažte, že F je funkce lichá.

4/ Ověřte, že jsou splněny předpoklady věty 61 – $M = (0,+\infty)$, $A = \langle 0,+\infty)$.

Nejdůležitější je opět nalezení konvergentní majoranty:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle 0,+\infty)} \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

Odtud plyne, že

$$F'(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

Ukažte, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

(nutno rozlišit případy $a = 0$, $a = 1$ anebo ukázat, že $F'(a)$ je spojitá v $\langle 0,+\infty)$ obojí proveďte podrobně!). Odtud vzhledem k podmínce $F(0) = 0$ a vzhledem k lichosti F dostáváme tvrzení.

1 6,21. Zkoumejte $\displaystyle K(a) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{x\,e^x}\,dx$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1,+\infty)$, pro $a \in (-\infty,-1\rangle$ je $K(a) = -\infty$.

2/ Ověřte předpoklady věty 61 $(M = (0,+\infty))$, $A = (-1,+\infty))$ – položíme-li

$$G(x) = \sup_{a \in A} \left| \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\right) \right| \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty),$$

je

$$\boxed{G(x) = \sup_{a \in (-1,+\infty)} e^{-(a+1)x} = 1} \quad \text{pro každé } x \in (0,+\infty)$$

a tedy $\underline{G \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}}$.

Musíme se proto omezit - obdobně jako u příkladů na spojitost - na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1, +\infty)$.

Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle p,+\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro} \quad x \in (0,+\infty),$$

tedy $G \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x}\, dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro} \quad a \in \langle p,+\infty).$$

Protože $\langle p,+\infty)$ byl libovolný interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \qquad \text{pro všechna} \quad a \in (-1,+\infty)$$

(rozmyslete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$\boxed{K(a) = \log (1+a)} \qquad \text{pro} \quad a \in (-1,+\infty).$$

6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\, dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k}$ pro $k \in (0,+\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů - a,k. Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0,+\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0,+\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.

Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} \left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) \right| = \left| e^{-kx} \cdot \cos ax \right| \leq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0,+\infty)$ (funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx} \cdot \cos ax\, dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(k),$$

(2) $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}} \, dx$

$D = (0, \infty)$ $\qquad I = (-1, \infty)$

(1) $f(\cdot, x)$ diferencovatelná (x pevné, dle α diferenc.)

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{-e^{-\alpha x^2} \cdot (-x^2)}{x e^{x^2}} = x \, e^{-x^2(\alpha+1)}$$

(3) majoranta

sup neprojde

interval $[p, \infty) \subset (-1, \infty)$

majoranta $\underline{x e^{-x^2(p+1)}} \in L^1(\underbrace{0, \infty}_{D})$

(2) $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná $\forall \alpha \in (-1, \infty)$

(spojitá)

(4) $\alpha_0 = 0$ $\qquad \int_0^\infty \frac{0}{x e^{x^2}} dx = 0$ ok

Pak $F'(\alpha) = \int_0^\infty x e^{-(\alpha+1)x^2} dx = \frac{1}{2(\alpha+1)}$ $\qquad \alpha \in (-1, \infty)$

$F(0) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\underline{\underline{F(\alpha) = \frac{1}{2} \ln(\alpha+1)}}$$

3

6,26. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$, $b > 0$.

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^\infty -xe^{-ax^2}\, dx = -\frac{1}{2a}\,,$$ konvergentní majoranta je

$G(x) = xe^{-px^2}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty)$, $p > 0$.

Tedy

$\boxed{F(a,b) = -\frac{1}{2}\log a + C(b)}$, protože $F(b,b) = 0$,

je $C(b) = \frac{1}{2}\log b$, tj. $F(a,b) = \log\frac{b}{a}$.

6,27. Spočtěte $J(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0,\pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1,+1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x}\,.$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in \langle -p,+p\rangle$ a pro $x \in (0,\pi)$ platí

$$\left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| = \frac{1}{|1+a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a|} \leq \frac{1}{1-p}\,,$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0,\pi)$).

Pomocí substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\,,$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \qquad \text{pro } a \in (-1,+1)\,.$$

c/ Ukažte, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro všechna $a \in \langle -1,+1\rangle$, stačí ukázat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$ (proč?), b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0\ , \quad b,c \in E_1\ .$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22 .

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\cos bx - \cos cx}{x}\,dx$!

Obdobně př. 6,33 , $F(a,b,c) = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ pro $a > 0$, $b,c \in E_1$.

(4) 6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(viz př. 5,84)},$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

tedy – vzhledem k $F(b,b) = 0$ – jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro} \quad a > 0\ , \quad b \geq 0\ .$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Toto tvrzení dokažte

Symetrie

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0$, $b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0$, $b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie. Vše podrobně proveďte !

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a .

(5) 6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\infty}\frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}}\,dx$!

[Majoranta $e^{-(p+1)x^2}$, $p \in (-1, \infty)$,

[a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1, +\infty)$.

b/ Pro $a \in (-1, +\infty)$ je podle věty 61 a př. 5,84

$$J'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x^2}\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a+1}} \text{ , tedy}$$

$$J(a) = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{a+1} - 1) \text{ pro } a \in (-1, +\infty) \text{ .}$$

c/ Ukažte, že $J(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí dokázat, že funkce J je spojitá v bodě -1 zprava (proč?),
k důkazu tohoto tvrzení použijte větu 60, kde položíte $M = (0, +\infty)$, $A = \langle -1, 0\rangle$ a použijete odhadu

$$\left| \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| \leq \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 e^{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \text{]}$$

6,37. Spočtěte $K(a,b) = \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx$!

[a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a, b \in E_1$.

b/ Protože funkce $K(a,b)$ je sudá funkce jak v proměnné „a", tak v „b", omezíme se na $a \geq 0$, $b \geq 0$.

c/ Buď tedy $b \geq 0$ pevné, $a \in (0, +\infty)$. Potom je $\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) =$
$= \int_0^{\infty} -\frac{2a}{x^2} \cdot e^{-\frac{a^2}{x^2}}\, dx$

(majoranta – pro $a \in \langle p, q\rangle$, kde $0 < p < q < +\infty$ – určíme podle následujícího odhadu – proveďte !

$$\left| -\frac{2a}{x^2}\, e^{-\frac{a^2}{x^2}} \right| \leq \frac{2q}{x^2} \cdot e^{-\frac{p^2}{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

Substitucí $t = \frac{1}{x}$ převedeme poslední integrál na Laplaceův integrál – př. 5,84 – dostaneme

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = -\sqrt{\pi} \quad ,$$

tedy vzhledem k $K(b,b) = 0$ vyjde

$$K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b - a) \text{ pro } b \geq 0 \text{ , } a > 0 \text{ .}$$

d/ Ukažte, že $K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b - a)$ pro všechna $a, b \in E_1$
(viz obdobný příklad 6,35).

e/ Porovnejte též s příkladem 5,76 e .]

Musíme ještě určit "konstantu" $C(b)$. Vzhledem k části c/ dostáváme

$$K(0,b) = \lim_{a\to 0_+} K(a,b) = \lim_{a\to 0_+}\left[\frac{\pi}{b}\cdot\log(b+a) + C(b)\right] = \frac{\pi}{b}\cdot\log b + C(b)$$

a zbývá nám tedy pouze spočítat $K(0,b) = \int_0^\infty \frac{\log x^2}{b^2+x^2}\,dx$. Pomocí substitucí $x = bt$, $t = \frac{1}{u}$ zjistíme, že $K(0,b) = \frac{\pi}{b}\log b$, tedy $C(b) = 0$.

e/ Lehko zjistíte, že

$$K(a,b) = \frac{\pi}{|b|}\cdot\log(|a| + |b|) \quad \text{pro } a,b\in E_1,\ b\neq 0.$$

6,43. Spočtěte $F(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cdot\cos bx - e^{-\alpha x}\cdot\cos\beta x}{x}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a > 0$, $\alpha > 0$, $b,\beta\in E_1$.

b/ Ukažte, že (viz př. 4,47 a 4,48)

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-px} pro $a\in\langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-ax}).

Odtud plyne, že

$$F(a,b,\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + C(\alpha,\beta) \quad \text{a}$$

vzhledem k podmínce $F(\alpha,\beta,\alpha,\beta) = 0$ jest

$$F(a,b,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2+b^2} \quad \text{pro } a > 0,\ \alpha > 0,\ b,\beta\in E_1.$$

6 ! 6,44. Spočtěte $J(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a > 0$, $b > 0$ či $a < 0$, $b < 0$.

b/ Předpokládejme, že $b > 0$ je pevné, buď $a\in(0,+\infty)$.

Potom

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$$

(majoranta $\frac{1}{1+p^2x^2}$ pro $a\in\langle p,+\infty)$, kde $p > 0$).

Vzhledem k podmínce $J(b,b) = 0$ je

$$J(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b} \quad \text{pro} \quad a > 0\,,\ b > 0\,.$$

c/ Jaký je výsledek pro $a < 0$, $b < 0$?

d/ Porovnejte též s příkladem 5,71. ‖

6,45.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^2}\, dx$!

‖ a/ Integrál konverguje pro každé $a \in E_1$, $b \in E_1$.

b/ Buď $a \in E_1$, potom funkce $H^{a,*}(b)$ je spojitá v E_1 (pro $b \in \langle -p,+p\rangle$ kde $p > 0$ je

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^2} \right| \leq \frac{|\operatorname{arctg} ax| \,.\, |\operatorname{arctg} px|}{x^2} \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)})$$

c/ Obdobně funkce $H^{*,b}(a)$ je spojitá v E_1 pro každé $b \in E_1$.

d/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+a^2x^2)}\, dx$$

(majoranta $\frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+p^2x^2)} \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$) .

Je nutno nyní spočítat tento integrál.

1/ Podle příkladu 6,20 je

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2} \log(1+\alpha) \quad \text{pro} \quad \alpha > 0\,,$$

provedeme-li tedy v našem integrálu substituci $ax = t$,

bude

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a}$$

2/ Kdybychom neznali výsledek příkladu 6,20 , byli bychom nuceni postupovat stejně jako v 6,20 , dostali bychom vlastně, že

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a\, \partial b}(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+b}$$

a odtud vzhledem k podmínce $\frac{\partial H}{\partial a}(a,0) = 0$ by bylo

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0\,,\quad b \geq 0\,.$$

Musíme se proto omezit – obdobně jako u příkladů na spojitost – na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1, +\infty)$.

Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle p, +\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \qquad \text{pro} \quad x \in (0, +\infty),$$

tedy $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x}\,dx = \frac{1}{a+1} \qquad \text{pro} \quad a \in \langle p, +\infty).$$

Protože $\langle p, +\infty)$ byl libovolný interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \qquad \text{pro všechna} \quad a \in (-1, +\infty)$$

(rozmyslete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$K(a) = \log (1+a) \qquad \text{pro} \quad a \in (-1, +\infty).$$

7

6,22. Buď $F(a,k) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\,dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k}$ pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů – a, k.
Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Proberme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0, +\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.
Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} \left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) \right| = \left| e^{-kx} \cdot \cos ax \right| \leqq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0, +\infty)$
(funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot \cos ax\,dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(k),$$

kde "konstanta" tentokrát může záviset na zvoleném $k \in (0,+\infty)$ (proč?). Z původního integrálu je ovšem ihned vidět, že

$$\boxed{F(0,k) = 0\ , \quad \text{tj.}\ C(k) = 0\ .}$$

II/ Zkusme nyní derivovat podle "k", nechť tedy $a \in E_1$ je pevné. Opět ověřte předpoklady věty 61,

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{-kx}\cdot\frac{\sin ax}{x}\right) = -e^{-kx}\cdot\sin ax\ .$$

Zde se nám již nepodaří najít majorantu společnou pro všechna $k \in (0,+\infty)$, to však nevadí – omezíme se opět pouze na $k \in (p,+\infty)$, kde $p > 0$.

Potom

$$\left|e^{-kx}\sin ax\right| \leqq e^{-kx} \leq e^{-px}\ , \quad x \in (0,+\infty)$$

a funkce $G(x) = e^{-px}$ je hledaná konvergentní majoranta. Integrací opět dostáváme (proveďte podrobně!, viz 4,47)

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{k} + C(a)\ ,$$

kde "konstanta" opět může záviset na (ze začátku pevně zvolené) hodnotě a. Rovnost platí pro všechna $k \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$ bylo libovolné číslo, tedy výsledek platí pro všechna $k \in (0,+\infty)$. Zbývá ještě určit $C(a)$, zde nám není nic platné do získané rovnosti dosadit $a = 0$ (proč?). Zkusíme provést limitní přechod pro $k \to +\infty$, bude-li totiž existovat $\lim\limits_{k\to+\infty} F(a,k)$ (při pevném $a \in E_1$), bude

$$\lim_{k\to\infty} F(a,k) = \lim_{k\to\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{k} + C(a)\right] = C(a)\ .$$

Podle 4,20 (proveďte ještě jednou)! je $\lim\limits_{k\to\infty} F(a,k) = 0$ pro libovolné $a \in E_1$. Teda $C(a) = 0$ pro každé $a \in E_1$ a jsme hotovi. ||

Z tohoto příkladu bylo velmi dobře vidět, že nebylo tak docela jedno, derivovali-li jsme podle jedné či druhé proměnné. V prvním případě byl přeci jenom postup o něco jednodušší. V dalších příkladech se vždy snažte derivovat podle všech proměnných a jednotlivé metody porovnávejte!

6,23. Ukažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\,dx$ má v intervalu $(0,+\infty)$ derivace všech řádů. Spočtěte je!

|| 1/ Lehko zjistíme, že $F(a) = \frac{1}{a}$, odkud plyne tvrzení a vztah

6,26. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$, $b > 0$.

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^{\infty} -xe^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a}$, konvergentní majoranta je

$\boxed{G(x) = xe^{-px^2}}$? pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty)$, $p > 0$.

Tedy

$F(a,b) = -\frac{1}{2} \log a + C(b)$, protože $F(b,b) = 0$,

je $C(b) = \frac{1}{2} \log b$, tj. $F(a,b) = \log \frac{b}{a}$.

8.

6,27. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x} dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0,\pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1,+1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} .$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in \langle -p,+p\rangle$ a pro $x \in (0,\pi)$ platí

$$\left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| = \frac{1}{|1+a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a|} \leq \frac{1}{1-p}$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0,\pi)$).

Pomocí substituce $\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} ,$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \quad \text{pro } a \in (-1,+1) .$$

X c/ Ukažte, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro všechna $a \in \langle -1,+1\rangle$, stačí ukázat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$ (proč?),

75735 Fig

k důkazu posledního tvrzení použijte větu 60 a vztahu

$$a \in \langle -1,+1 \rangle \Rightarrow \frac{\log(1-\cos x)}{\cos x} \leq \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x} \leq \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

proveďte podrobně ! ‖

(9.)

6,28. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$!

‖ a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$.

b/ Spočtěte $J(a)$ pomocí věty 61 , dostanete

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x}$$ s konvergentní majorantou

$G(x) = \frac{2}{1-p^2}$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a \in \langle -p,+p \rangle \subset (-1,+1)$.

‖ Po substituci $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, tedy $(J(0) = 0)$ $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in (-1,+1)$.

c/ Ukažte, že funkce J je spojitá v intervalu $\langle -1,+1 \rangle$, odkud vyplyne, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$ – viz předchozí příklad 6,27.

d/ Použijte též výsledku př. 6,27 , dostanete

$$\pi \cdot \arcsin a = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)\,dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-a\cos x)}{\cos x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,dx = J(a) \qquad \text{pro } a \in \langle -1,+1 \rangle .$$ ‖

6,29. Spočtěte $K(A) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+\sin A \cos x)}{\cos x}\,dx$!

‖ a/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $A \in E_1$.

b/ Uvědomte si, že $K(A)$ je periodická funkce s periodou 2π .

c/ Při vlastním výpočtu (použití věty 61) je třeba vyloučit hodnoty, kde $|\sin A| = 1$ (proč?), vyjde $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$, $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k celé.

d/ Ukažte, že funkce K je spojitá v E_1 , tedy $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$.

e/ Ukažte, že $K(A) = \pi A$ pro $A \in \langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \rangle$.

10

6,19. Spočtěte $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\,\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x}\,dx$!

1/ I když to v těchto příkladech není nutné, budeme vždy zkoumat, pro jaké hodnoty parametru $\underline{a}$ daný integrál konverguje.
Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův pro všechna $a \in E_1$.

2/ Podle věty 61 spočítáme $F'(a)$, vzhledem k tomu, že funkce F je lichá (proč?), omezíme se jen na hodnoty $a \ge 0$, tj. ve větě 61 položíme $M = (0, \frac{\pi}{2})$, $A = \langle 0,+\infty)$.

Ověřujeme jednotlivé předpoklady věty 61:

P O a/ pro každé $a \in \langle 0,+\infty)$ je $\frac{\operatorname{arctg}(a\,\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x} \in \Lambda_{(0,\frac{\pi}{2})}$ (proč?),

b/ integrál konverguje pro $a = 0$ (my jsme vlastně ukázali daleko více - že konverguje pro všechna $a \in E_1$!),

c/ pro každé $a \in \langle 0,+\infty)$ a každé $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ existuje

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\operatorname{arctg}(a\,\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x}\right) = \frac{1}{1+a^2\mathrm{tg}^2x} ,$$

d/ musíme najít konvergentní majorantu k této derivaci, položme

$$\mathcal{G}(x) = \sup_{a\in\langle 0,+\infty)} \frac{1}{1+a^2\mathrm{tg}^2x} \qquad \text{pro } x \in (0,\frac{\pi}{2}) ,$$

zřejmě $\mathcal{G}(x) = 1$ pro všechna $x \in (0,\frac{\pi}{2})$, tedy $\mathcal{G} \in \mathcal{L}_{(0,\frac{\pi}{2})}$.

Podle tvrzení věty $\underline{61}$ integrál konverguje pro všechna $a \in \langle 0,+\infty)$ a

P O Spočítat $$F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\mathrm{tg}^2x}\,dx \qquad a \in \langle 0,+\infty) .$$

Podle př. 6,17 zjistíme, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a} , \qquad a \in \langle 0,+\infty).$$

Odtud plyne, že existuje taková konstanta C , pro niž $F(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\log(1+a) + C,$ $a \in \langle 0,+\infty \rangle$ (odůvodněte!).

Zbývá nyní jen určit hodnotu konstanty C . Víme však, že předchozí rovnost platí pro všechna $a \in \langle 0,+\infty)$, tedy i pro $a = 0$. Protože $F(0) = 0$, dostáváme ihned, že

$$0 = F(0) = \frac{\pi}{2}\cdot\log(1+0) + C ,$$

tj. $C = 0$.

f/ Nakreslete graf funkce $K(A)$!

g/ Má funkce $K(A)$ všude v E_1 derivaci ?

h/ Porovnejte výsledek s př. 6,27 – stačilo položit $a = \sin A$. ‖

11.

6,30. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a \in E_1$, $b \in E_1$ s výjimkou $a = b = 0$.

b/ Funkce $F(a,b)$ je sudá v „a“ i „b“, omezte se proto na $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

c/ Zvolme libovolné $b \in (0,+\infty)$ pevné, buď $a \in (0,+\infty)$.

Podle věty 61 dostanete

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2 \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}\, dx$$

(majoranta pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$

$$\left| \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2 \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \right| \leq \left| \frac{2}{a} \right| \leq \frac{2}{p} \in \mathcal{L}(0, \tfrac{\pi}{2}))$$

Substitucí $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{a+b}$.

Ze vztahu $F(b,b) = \pi \cdot \log b$ vyplyne konečně

$$F(a,b) = \pi \cdot \log \frac{a+b}{2} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \quad b > 0 .$$

d/ Ukažte, že výsledek platí i pro $a = 0$, $b > 0$ (či $a > 0$, $b = 0$) .

Buď tedy $b \in (0,+\infty)$ pevné, stačí ukázat, že funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a je spojitá v bodě 0 zprava. Použijte větu 60 ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a \in \langle 0,1 \rangle$) a odhadu

spoj. bod

$$\log b^2 \cos^2 x \leqq \log(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) \leqq \log(1 + b^2)$$

e/ Pomocí předchozího výsledku odtud odvoďte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2} ,$$

viz též př. 5,87 ; 8,64 . ‖

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \qquad (1)$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx}}{x}\right]_b^a dx = \int_0^\infty \int_b^a \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-yx}}{x}\right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_b^a -e^{-yx}\,dy\,dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_b^a \int_0^\infty -e^{-yx}\,dx\,dy$$

$$= \int_b^a \left[\frac{e^{-yx}}{y}\right]_0^\infty dy = \int_b^a -\frac{1}{y}\,dy = +\ln b - \ln a$$

$$= \ln \frac{b}{a}$$

$b, a > 0$, $b - a = 0$ $\int = 0$, finit div.

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2) - \ln(1+b^2x^2)}{x^2}\, dx \qquad (2)$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\ln(1+y^2x^2)}{x^2} \right]_b^a dx = \int_0^\infty \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2} \cdot 2y \; dy\, dx$$

$$= \int_b^a \int_0^\infty \frac{2y}{1+y^2x^2}\, dx\, dy = \int_b^a \left[2 \cdot \operatorname{arctg} yx \right]_0^\infty dy$$

$$= \int_b^a \pi \cdot 1\, dy = \pi \left[y \right]_b^a = \underline{\underline{\pi(a-b)}}$$

	$a,b > 0$	$\pi(a-b)$
	$a,b < 0$	$F(a,b) = F(-a,-b) = \pi(b-a)$

(3)

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-0x^2}-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{xe^{x^2}}\right]_a^0 dx = \int_0^\infty \int_a^0 -x\,\frac{e^{-yx^2}}{e^{x^2}}\,dy\,dx$$

$$= \int_a^0 \int_0^\infty -x\, e^{x^2(-1-y)}\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^0 \left[\frac{e^{x^2(-1-y)}}{+2(1+y)}\right]_0^\infty dy = \int_a^0 \frac{-1}{2(1+y)}\,dy$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\ln(1+y)\right]_a^0 = \underline{\underline{+\frac{1}{2}\ln(1+a)}}$$

$$\frac{e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} \sim e^{(-a-1)x^2} = e^{-(a+1)x^2}$$

u/ spočítejte příklady v 5,42 pomocí substituce (pokud je to výhodné).

$\boxed{5,70.}$ **Dokažte následující tvrzení:**

a/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \ ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx\, dy\, dz = \frac{4}{5} \pi abc \ ,$$

b/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \ ; \quad x^2 + y^2 \leq 2az, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M (x + y + z)^2 \, dx\, dy\, dz = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \, dx\, dy\, dz = $$
$$= \frac{\pi a^5}{5} (18 \sqrt{3} - \frac{97}{6}) \ ,$$

c/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \ ; \quad y^2 + z^2 \leq x^2 \ , \quad x \geq 0 \ , \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$

$$\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \, dx\, dy\, dz = \frac{\pi R^5}{5} (2 - \sqrt{2}) \ ,$$

d/ M je omezena $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2 y \ , \quad z = 0 \Rightarrow \iiint_M \frac{xyz}{x^2+y^2} \, dx\, dy\, dz =$
$= \frac{a^4}{144}$,

e/* $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \quad x \geq 0 \ , \ y \geq 1 \ , \ z \geq 1 \ , \ xyz \leq 1 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M e^{xyz} \, . \, x^2 y \, dx\, dy\, dz = \frac{e}{2} - 1$$

[Zaveďte substituci $x = u \ , \quad y = \frac{u+v}{u} \ , \quad z = \frac{u+v+w}{u+v}$] ,

f/ M je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ , \quad x^2 + y^2 = 3z \Rightarrow \iiint_M z \, dx\, dy\, dz =$
$= \frac{13}{4} \pi$.

Fubiniovy věty lze též užít k výpočtu některých integrálů. Metodě, podle které budeme v následujících příkladech postupovat, se někdy říká "integrace podle parametru".

5,71. Spočtěte integrál $I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} \, dx$. (4)
(viz též př. 6,44 .)

[Lehko zjistíte viz obdobný příklad 3,42 - že pro $a \leq 0$, $b > 0$ anebo pro $a > 0$, $b \leq 0$ integrál $I(a,b)$ diverguje. Buď tedy $a > 0$, $b > 0$, nechť např. je $b < a$.
Uvažujme následující integrál I ,

$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2 y^2} \, dx\, dy$, kde $M = \left\{ [x,y] \in E_2 \ ; \quad x \in (0,+\infty) \quad y \in (b,a) \right\}$

Funkce $\frac{1}{1+x^2y^2}$ je spojitá a kladná na množině M, tedy $\frac{1}{1+x^2y^2} \in \mathscr{L}_M^{\pi}$ a můžeme použít Fubiniovu větu.

Dostáváme

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dxdy = \int_0^{\infty} \left(\int_b^a \frac{dy}{1+x^2y^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} dx = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx =$$

$$= I(a,b) \ ,$$

na druhé straně, provedeme-li integraci v obráceném pořadí,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy = \int_b^a \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx \right) dy = \int_b^a \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{y} \right]_{x=0}^{x=+\infty} dy =$$

$$= \int_b^a \frac{\pi}{2y}\,dy = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} \ .$$

Odtud vyplývá, že

$$I(a,b) = I = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} \ .$$

V praxi ovšem funkci $\frac{1}{1+x^2y^2}$ a množinu M musíme nalézt, obyčejně postupujeme takto:

$$\frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} = \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right) dy =$$

$$= \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2}\,dy \ . \rfloor$$

Z uvedeného příkladu bylo vidět, v čem spočívá metoda integrace podle parametru. Oklikou přes dvojný integrál se nám podařilo spočítat integrál, s kterým bychom si jinak těžko věděli rady. Jiné způsoby výpočtu těchto integrálů, pomocí metody derivace podle parametru, jsou uvedeny v následující 6. kapitole.

5,72. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log \frac{b+1}{a+1}$ pro $a \in (-1,+\infty)$, $b \in (-1,+\infty)$. 5

1/ Zjistěte jako cvičení, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > -1$, $b > -1$.

2/ Buď $-1 < a < b$. Potom

$$\frac{x^b - x^a}{\log x} = \left[\frac{x^y}{\log x} \right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^y}{\log x} \right) dy = \int_a^b x^y \, dy .$$

Ukažte, že na integrál

$$\iint_M x^y \, dx \, dy , \quad M = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \quad x \in (0,1) \quad y \in (a,b) \right\}$$

můžete použít Fubiniovu větu, dostanete

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} \, dx = \iint_M x^y dx \, dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \, dx \right) dy = \log \frac{b+1}{a+1} .$$

5,73. Poznámka:

Speciální volbou hodnot a, b dostáváme z minulého příkladu např.

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x} \, dx = \log 2 \quad (b = 1 , \quad a = 0) ,$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\log x} \, dx = \log \frac{3}{2} \quad (b = \frac{1}{2} , \quad a = 0), \text{ atd.},$$

kteréžto integrály bychom asi jinak těžko počítali.

5,74. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x} = \pi \arcsin \frac{b}{a} \quad \text{pro} \quad 0 < b \leqq a .$$

A/ Použijte vztahů

1/ $$\log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dy}{a^2 - b^2 y^2 \sin^2 x}$$

pro $0 < b \leq a$,

2/ $$\frac{1}{a^2 - b^2 y^2 \sin^2 x} \in \mathcal{L}_M^R \quad \text{pro} \quad M = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \right.$$

$$\left. x \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad y \in (0,1) \right\} ,$$

3/ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{A^2 - B^2 \sin^2 z} = \frac{\pi}{2A} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2}} \quad \text{pro} \quad |A| > |B| .$$

B/ Použijte též vztahu

355 JT /13

(6)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{x} \right]_{b=y}^{a=y} = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-yx^2}}{x} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^\infty \int_b^a -xe^{-yx^2} dy\, dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_b^a \int_0^\infty -xe^{-yx^2} dx\, dy =$$

$$= \int_b^a \left[\frac{1}{2y} e^{-yx^2} \right]_0^\infty dy = \int_b^a -\frac{1}{2y}\, dy = -\frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}$$