3/ F je spojitá v (p,q) $\Longleftrightarrow$ F je spojitá v <u>každém</u> intervalu $\langle p_0,q) \subset (p,q)$.

Těchto jednoduchých vět tedy budeme v dalších příkladech používat, podrobně si je prostudujte a promyslete!

Tatáž poznámka platí i pro použití věty 61, hledáme-li konvergentní majorantu $\mathcal{G}$, kde opět bývá nejlepší zkusit

$$\mathcal{G}(x) = \sup_{\alpha \in A} \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) \right| .$$

(1) **6,3.** Ukažte, že funkce F, $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,dx$, je spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$. $\lim_{\alpha \to \infty} = 0$

1/ Ukažte nejdříve – jako cvičení – že tento integrál konverguje, právě když $\alpha \in \langle 0,+\infty)$. interval?

2/ Ukážeme, že F je spojitá v $\langle 0,+\infty)$, použijeme větu 60, kde klademe $M = (0,+\infty)$, $A = \langle 0,+\infty)$. Ověříme předpoklady:

$\mathcal{P}$-2 1/ pro každé $\alpha \in \langle 0,+\infty)$ je funkce $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$ (jakožto funkce x!) spojitá v $(0,+\infty)$, tedy $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$

$\mathcal{P}$-1 2/ pro každé $x \in (0,+\infty)$ je funkce $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$ (jakožto funkce α!) spojitá v $\langle 0,+\infty)$,

$\mathcal{P}$-3 3/ Položíme-li $g(x) = \sup_{\alpha \in \langle 0,+\infty)} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$, je $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na $(0,+\infty)$ a tedy $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Tím jsme ověřili všechny předpoklady věty 60 a podle tvrzení této věty je funkce F spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$

6,4. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$ je spojitá v $(0,+\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $\alpha \in (0,+\infty)$.

2/ Ukážeme, že F je spojitá v $(0,+\infty)$, položte ve větě 60 $A = (0,+\infty)$, $M = (0,+\infty)$ a ověřte předpoklady 1/ a 2/.

Hledejme konvergentní majorantu, nejvýhodnější je zkusit $g(x) =$ užše $\sup_{\alpha \in (0,+\infty)} e^{-\alpha x}$, odtud plyne, že $g(x) = 1$ pro každé $x \in (0,+\infty)$ a není tudíž $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (proč?).

Zkusme postupovat podle poznámky 6,2. Stačí, ukážeme-li, že funkce F

a/ $g_1(x) = \dfrac{|\cos x|}{x^q} + \dfrac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \dfrac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max\left(\dfrac{1}{x^p}, \dfrac{1}{x^p}\right)$

d/ $g_4(x) = \dfrac{1}{x^p} + \dfrac{1}{x^q}$.

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x}\, dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$.

1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0, +\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$.

Majoranta $g(x) = \sup\limits_{s \in \langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) , \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1, +\infty) , \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0, +\infty)$ pro $s \in \langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max\left(e^{-x} x^{p-1}, e^{-x} x^{q-1}\right)$,

b/ $g_2(x) = e^{-x}\left(x^{p-1} + x^{q-1}\right)$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^\infty \dfrac{x^{b-1}}{1+x}\, dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

2/ F je spojitá v libovolném intervalu $\boxed{\langle p,q\rangle \subset (0,1),}$ konvergentní majoranty:

vše σ

Vce intervalu

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}}{1+x} & \text{pro} \quad x \in (0,1) \\[2ex] \dfrac{x^{q-1}}{1+x} & \text{pro} \quad x \in (1,+\infty)\ , \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro} \quad x \in (0,1) \\[1ex] x^{q-2} & \text{pro} \quad x \in (1,+\infty)\ , \end{cases}$$

$$g_3(x) = x^{p-1} + x^{q-2} \qquad \text{apod.} \ \|$$

6,12. Dokažte, že

a/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$,

b/ $F(a) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x(x+a)^2}\,dx$ -"- v $(-1,+\infty)$,

c/ $F(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)}\,dx$ -"- v $(-\infty,2)$,

d/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ -"- $(-1,+\infty)$,

e/ $F(a) = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{|\log x|^a}$ -"- $(-\infty,1)$,

f/ $F(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-ax}\,dx$ -"- $(0,+\infty)$,

g/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \log(x^2+a^2)\,dx$ -"- $(0,+\infty)$.

6,13. Uvažujeme $F(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} a\, e^{-a^2 x}\,dx$.

1/ Dokažte, že integrál konverguje pro každé $a \in E_1$

2/ Dokažte, že F je funkce lichá.

3/ Dokažte, že F je spojitá v $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

‖ Vezměte libovolný interval $\langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$, potom zřejmě

(2)

$$F(y) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1+y\sin x)}{x}\, dx \qquad y \in (0, \infty)$$

v 0: $\lim\limits_{y \to 0+} \frac{\ln(1+y\sin x)}{y \sin x} \cdot \frac{y \sin x}{x} = 0$

v 0: $\lim\limits_{x \to 0} \qquad = y$

f.e. je zvezna na $(0, p]$ $\to$ na $(0, \infty)$

majoranta: $\frac{\ln(1+y\sin x)}{x} \leq \frac{y \sin x}{x} \leq y \leq p$

(4)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2}\,dx$$

$\alpha \in (-\infty, \infty)$

(1) $f(\cdot, x)$, $x \in (0,\infty)$ je spoj. v (α) (složení spoj. fcí)

(2) $\forall \alpha \in (-\infty,\infty)$ je fce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná (dodefinujeme)

(3) majoranta

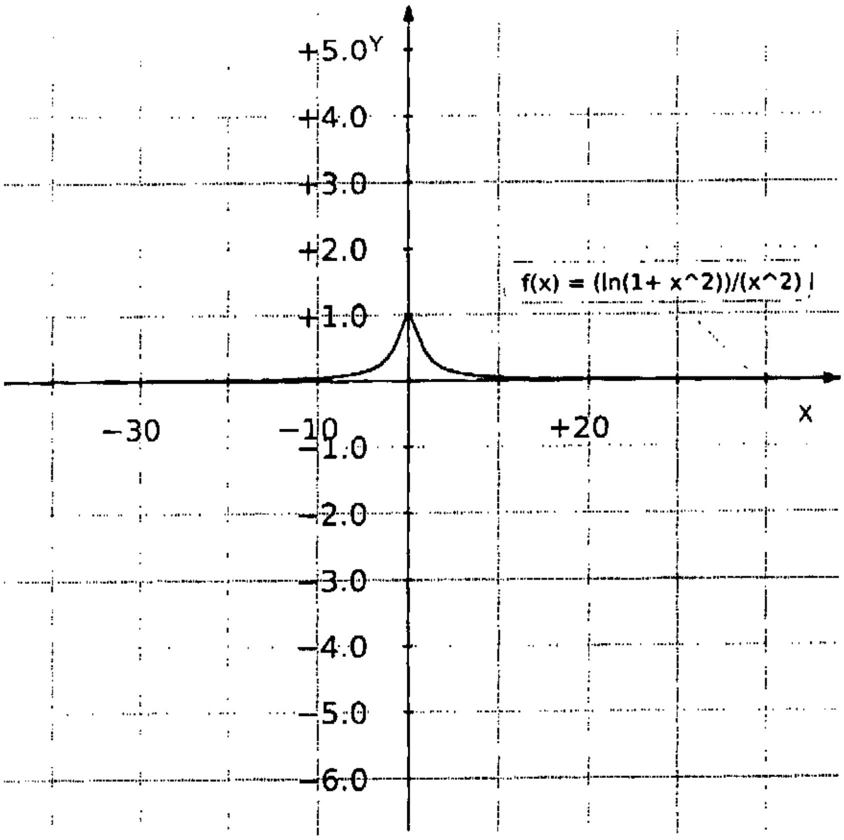
pro $[-p,p]$

$$g(x) = \frac{\ln(1+p^2x^2)}{x^2}.$$

// lim v 0 ;-)

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\ln(1+y^2x^2)}{x^2} = \lim_{y\to 0+} \frac{\ln(1+y^2x^2)}{y^2x^2}\,y^2 = 0$$

$\cancel{\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y^2x^2)}{x^2} = \infty}$



Y
+5.0
+4.0
+3.0
+2.0
+1.0
−1.0
−2.0
−3.0
−4.0
−5.0
−6.0
−30
−10
+20
X
f(x) = (ln(1+ x^2))/(x^2)

(5) $F(y) = \int_0^1 \frac{y^{x^2+1}}{x^2+1}$

$\lim_{y \to 0+} F(y)$

- majoranta $g(x) \equiv 1$ pro $y \in (0,1)$

- $\lim = 0$

a/ $g_1(x) = \frac{|\cos x|}{x^q} + \frac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max\left(\frac{1}{x^p}, \frac{1}{x^p}\right)$

d/ $g_4(x) = \frac{1}{x^p} + \frac{1}{x^q}$. ‖

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x}\, dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$.

1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0,+\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$.

$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} = \infty$

Majoranta $g(x) = \sup_{s \in \langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1), \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0,+\infty)$ pro $s \in \langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max(e^{-x} x^{p-1}, e^{-x} x^{q-1})$,

b/ $g_2(x) = e^{-x}(x^{p-1} + x^{q-1})$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1,+\infty) \end{cases}$. ‖

6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x}\, dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

3/ $F(a) = \int_0^1 x^a\, dx$ je spojitá funkce v $(-1,+\infty)$,

4/ $F(n) = \int_1^{\infty} x^n\, dx$ je spojitá funkce v $(-\infty,-1)$,

5/ $F(y) = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}\, dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$.

7

6,8. Dokažte, že funkce $F(a) = \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{2 + x^a}$ je spojitá funkce v intervalu $(2,+\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a \in (2,+\infty)$, viz př. 3,44-10.

2/ Ukažte, že F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p,+\infty)$, kde $p > 2$.

Položíte-li $g(x) = \sup\limits_{a \in \langle p,+\infty)} \frac{x}{2 + x^a}$ pro $x \in (0,+\infty)$

je

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in (0,1) \\ \frac{x}{2 + x^p} & \text{pro } x \in \langle 1,+\infty) . \end{cases}$$

(Promyslete a odůvodněte!)

Protože $\frac{x}{2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a $\frac{x}{2 + x^p} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ je

$g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (opět odůvodněte!) a jsou splněny předpoklady věty 60.

8

6,9. Ukažte, že funkce $I(a) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^a}\, dx$ je spojitá v intervalu $(1,+\infty)$.

1/ Ukažte, že pro $a \in (1,+\infty)$ integrál konverguje.

2/ Ukažte, že funkce I je spojitá v každém intervalu $\langle p,q\rangle \subset (1,+\infty)$,

$$\text{majoranta } g(x) = \sup_{a \in \langle p,q\rangle} \left| \frac{\cos x}{x^a} \right| = \begin{cases} \frac{|\cos x|}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{|\cos x|}{x^p} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

snadno nahlédnete, že $g \in \mathcal{L}_{(\frac{1}{2},+\infty)}$

3/ Jako cvičení ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $\frac{\cos x}{x^a}$ na intervalu $(\frac{1}{2}, +\infty)$ pro $a \in \langle p,q\rangle \subset (1,+\infty)$:

$$a \in \langle p,q\rangle \Rightarrow \left| ae^{-a^2x} \right| \leq qe^{-p^2x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} .\|$$

4/ Zkoumejme nyní spojitost funkce F v bodě $a = 0$. Abychom ukázali, že F je spojitá v bodě $a = 0$, stačilo by ukázat (ale není to nutné!), že F je spojitá v nějakém intervalu $\langle -p, +p\rangle$, kde $p > 0$. Zkoumejme, jak vypadala majoranta na intervalu $(0,+\infty)$ pro $a \in \langle -p,p\rangle$

$$g(x) = \sup_{a\in\langle -p,p\rangle} \left| ae^{-a^2x} \right| = \max \left(pe^{-p^2x} ; \ \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

(proveďte podrobně!). Protože $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, nemůže být ani $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$. Vidíme, že se nám nepodaří nalézt konvergentní majorantu k funkci ae^{-a^2x} na $(0,+\infty)$ pro žádný interval $\langle -p,+p\rangle$ (z toho ovšem ještě neplyne, že by funkce F nebyla spojitá v bodě $a = 0$!). Spočtěte však, že $F(0) = 0$, $F(a) = \frac{1}{a}$ pro $a \neq 0$ – tedy F není spojitá v bodě $a = 0$.

I když tedy funkce $f(x,a)$ byla spojitá pro každé pevné $x \in (0,+\infty)$ v bodě $a = 0$, není funkce $F(a) = \int_0^\infty f(x,a)\,dx$ spojitá v bodě $a = 0$.

4 $\boxed{6,14.}$ Uvažujme $F(a) = \int_0^1 \operatorname{sign}(x-a)\,dx$.

1/ Pro každé $a \in E_1$ je $\operatorname{sign}(x-a) \in \Lambda_{(0,1)}$ (odůvodněte!). Protože $|\operatorname{sign}(x-a)| \leq 1$ pro $x \in (0,1)$, je $\operatorname{sign}(x-a) \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ pro každé $a \in E_1$.

V 0 nespojitost

2/ Buď $x \in (0,1)$ pevné, potom funkce $\operatorname{sign}(x-a)$ (jakožto funkce a!) je spojitá ve všech bodech $a \in E_1$ s výjimkou bodu $a = x$, kde je nespojitá.

3/ Lehko zjistíte, že

$$F(a) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a \in (-\infty, 0\rangle, \\ 1 - 2a & \text{pro } a \in (0,1) \\ -1 & \text{pro } a \in \langle 1,+\infty), \end{cases}$$

tedy F je spojitá v celém E_1.

Proti příkladu 6,13 je nyní $f(x,a)$ nespojitá (při pevném x jako funkce a) a funkce $F(a)$ spojitá.

$\boxed{6,15.}$ Uvažujeme $F(a) = \int_1^3 \operatorname{sign} a\,dx$.

1/ Ukažte, že pro libovolné $a \in E_1$ integrál konverguje.

2/ Funkce $\operatorname{sign} a$ je nespojitá v bodě $a = 0$.