5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Záměna limity a integrálu 2)**.** Nechť $\{f\}$ je **spojitá** funkce na intervalu $[a,b)\times M$. Má-li $f(x,y)$ **integrovatelnou majorantu na** $[a,b)$ vzhledem k $y\in M$, pak pro $y_0\in\bar{M}$ platí

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 2 (Spojitost integrálu s parametrem)**.** Nechť $\{f\}$ je **spojitá** funkce na intervalu $[a,b)\times J$ a integrál $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ **existuje pro každé** $y\in J$.

1. Má-li $f(x,y)$ **integrovatelnou majorantu na** $[a,b)$ vzhledem k $y\in M$, pak funkce $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ je na J spojitá.
2. Nechť f je **omezená spojitá** funkce definovaná na **omezeném** intervalu $I\times J$. Pak funkce $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ je na J spojitá.

Věta 3. Funkce f je spojitá v intervalu (p,q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0,q_0]\subset(p,q)$.

Funkce f je spojitá v intervalu (p,q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $(p_0,q_0]\subset(p,q)$.

Funkce f je spojitá v intervalu (p,q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0,q_0)\subset(p,q)$.

Pro intervaly $(a,b]$ věty platí taky.

Příklady

1. Ukažte, že funkce F
$$F(y)=\int_0^\infty \frac{e^{-yx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $[0,\infty)$ a určete
$$\lim_{y\to\infty} F(y).$$

2. Ukažte, že funkce F
$$F(y)=\int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $(0,1)$.

3. Určete

$$\lim_{y\to 0+} F(y),$$

kde

$$F(y) = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + y\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

$y \in (0, \infty)$.

4. Ukažte, že funkce F

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{\ln(1 + y^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.

5. Určete

$$\lim_{y\to 0+} F(y),$$

kde

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y^{x^2+1}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

$y \in (0, \infty)$.

6. Ukažte, že funkce F

$$F(y) = \int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

(tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.

7. Ukažte, že funkce F

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{x}{2 + x^y}\,\mathrm{d}x,$$

je spojitá v intervalu $(2, \infty)$.

8. Ukažte, že funkce F

$$F(y) = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^y}\,\mathrm{d}x,$$

je spojitá v intervalu $(1, \infty)$.

9. Ukažte, že funkce F

$$F(y) = \int_0^1 \mathrm{sgn}(x - y)\,\mathrm{d}x,$$

je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.