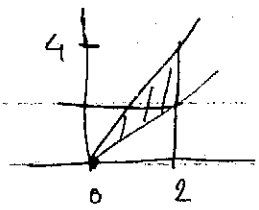
(1) $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$



$x \in (0,2)$

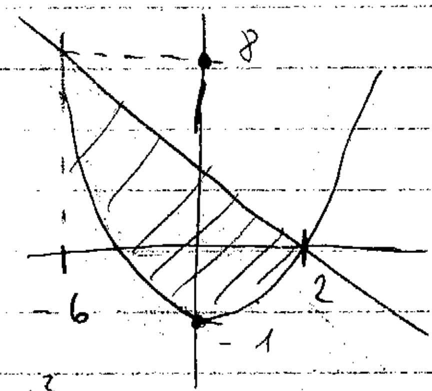
$x \le y \le 2x \quad \to \quad x \le y$

$\frac{y}{2} \le x$

$\int_0^2 \int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^4 \int_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$

y x

(2) $\int_{-6}^{2} \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$



$\frac{x^2}{4} - 1 \le y$ $\qquad$ $y \le 2 - x$

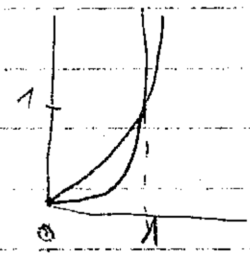
$x^2 \le 4(y+1)$ $\qquad$ $x \le 2 - y$

$|x| \le \sqrt{4(y+1)}$

$\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{4(y+1)}}^{\sqrt{4(y+1)}} f(x,y)\,dx\,dy$

$+ \int_0^8 \int_{-\sqrt{4(y+1)}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

(3) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$



$x^3 \le y \le x^2$

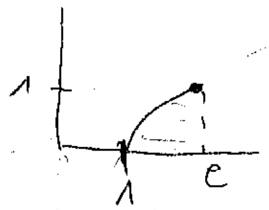
$x \le \sqrt[3]{y}$ $\qquad$ $x \ge \sqrt{y}$

$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dy\,dx$

(ii) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy\,dx$

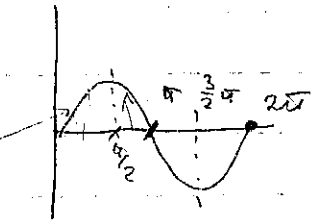
$0 \le y \le \ln x$

$e^y \le x$



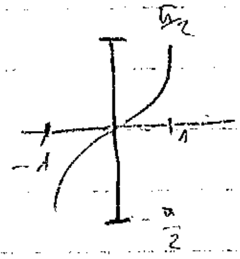
$\int_0^1 \int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dy\,dx$

(5) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy\,dx$

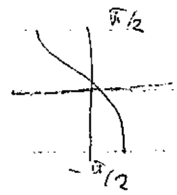


$0 \le y \le \sin x$

$\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} + \int_0^1 \int_{\pi/2}^{\pi - \arcsin y}$



$- \int_{-1}^{0} \int_{\pi - \arcsin y}^{\frac{3}{2}\pi} - \int_{-1}^{0} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi + \arcsin y}$



- arcsin

$\sin x \le y \le 0$

$-\sin(x-\pi) \le y \le 0$

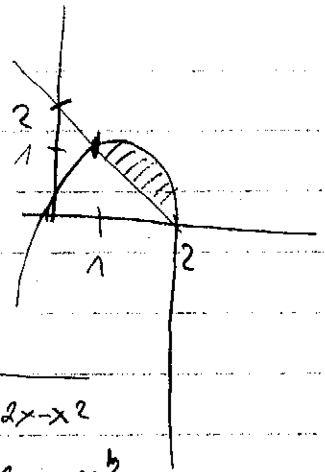
$\sin(x-\pi) \ge -y$

$x - \pi \ge -\arcsin y$

$x \ge \pi - \arcsin y$

VZOR

(4) $\int_{1}^{2} \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$



$2 - x \le y$

$2 - y \le x$

$y \le \sqrt{2x-x^2}$

$y^2 \le 2x - x^2$

$x^2 - 2x + y^2 \le 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4y^2}}{2}$

$\int_{0}^{1} \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$

(5)

3/ při použití Lebesgueovy věty bývá výhodné položit
$g(x) = \sup\limits_{n \in N} |f_n(x)|$ (kde N je množina přir. čísel)
pro každé $x \in M$. V tomto případě zvolíme $x \in M$ pevné a hledáme $\sup |f_n(x)|$ přes množinu všech přirozených čísel (anebo alespoň pro všechna $n \geq n_0$, kde n_0 je pevné přirozené číslo). Jak postupovat v tomto případě ukážeme na příkladech.

POZOR ! - při vyšetřování stejnoměrné konvergence hledáme
$\sup\limits_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$, kdežto při použití Lebesgueovy věty hledáme $\sup\limits_{n \in N} |f_n(x)|$!

(1) **4,2.** Ukažte, že $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx = 0$!

1/ Pro každé $n \in N$ existuje integrál jako Riemannův i Newtonův, ukažte, že $\displaystyle\int_0^1 x^n n^{-1}\, dx = \frac{1}{n\,(n+1)}$, odkud plyne tvrzení.

2/ Využijte též odhadu $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n}\, dx \leq \frac{1}{n}$.

3/ Použijte větu 20 :

a/ limitní funkce $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{n} = 0$ pro každé $x \in (0,1)$,

SS: b/ $\dfrac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$ na intervalu $(0,1)$ (zřejmě $0 \leq \dfrac{x^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$)

tedy $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n}\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0$.

(Jako cvičení ukažte, že $\sigma_n = \dfrac{1}{n}$!).

4/ Použijte Leviho větu:

a/ $\dfrac{x^n}{n} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ pro každé $n \in N$ (proč ?!),

b/ $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{x^n}{n}$ pro každé $x \in (0,1)$ a každé $n \in N$.

Dokažte poslední nerovnost přímo anebo použitím tvrzení, že pro libovolné $x \in (0,1)$ je funkce $\varphi(z) = \dfrac{x^z}{z}$ jakožto funkce z klesající v intervalu $(1, +\infty)$.

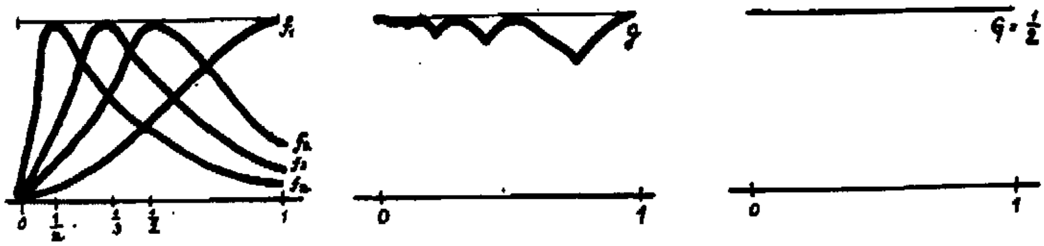
Leb. 5/ Použijte Lebesgueovu větu:

Hledáme funkci g tak, aby $g \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a byla splněna nerovnost $\left|\dfrac{x^n}{n}\right| \leq g(x)$ pro všechna $n \in N$ a všechna $x \in (0,1)$, stačí zřejmě položit $\boxed{g = 1}$ na intervalu $(0,1)$.

Zkusme spočítat $\sup\limits_{n \in N} \dfrac{x^n}{n}$ pro $x \in (0,1)$
(tím vlastně dostaneme nejlepší odhad), je vidět, že $\sup\limits_{n \in N} \dfrac{x^n}{n} = x$ pro $x \in (0,1)$, stačí tedy položit v Lebesgueově větě $g(x) = x$ na $(0,1)$. ||

šetřovali supremum přes množinu všech přirozených čísel N , vyšetřovali jsme vlastně supremum přes množinu všech reálných čísel v intervalu $\langle 1, +\infty)$ (podrobně rozmyslete !). Kdyby tedy vyšlo $\int_0^1 G = +\infty$, stále by mohlo být $\int_0^1 g < +\infty$.

Viz následující obrázek:



Obrázek č.4

5/ Ukažte, že nelze přímo použít Leviho větu .

4,4.	Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}\,.\,x}{1+n^2x^2}\,dx = 0$!

1/ Ověřte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu

$$0 \leq n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{x}{1+n^2x^2}\,dx \leq n^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{1/n} x\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{n^2 x}\,dx \right) =$$

$$= n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{\log n}{n} \right) .$$

3/ Ukažte, že posloupnost $\frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2}$ nekonverguje stejnoměrně k nule v intervalu $(0,1)$ jest

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} = \max \left\{ 0 ;\ \frac{\sqrt{n^3}}{1+n^2} ;\ \frac{\sqrt{n}}{2} \right\} .$$

Leb

4/ Ukažte, že jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty, jest

$$\sup_{n\in N} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} \leq \sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} = \max \left\{ \frac{x}{1+x^2} ;\ 0;\ \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\sqrt{x}} \right\} =$$

$$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4.\sqrt{x}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$$

(2)

4,5.	Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 0$

1/ Ukažte, že $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow +\infty$ na intervalu $(0,1)$, ale nekonvergují tam stejnoměrně.

Poslední tvrzení dokažte

a/ tím, že ukážete $\sigma_n = \frac{1}{2}$,

b/ podrobně z následujících vztahů:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 1-} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) \quad !$$

Leb

2/ Použijte Lebesgueovu větu:

"rychlý", ale "hrubý" odhad dává $0 \leq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leq 1$ v $(0,1)$

anebo "lepší" odhad $0 \leq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \dfrac{x}{1+x^2}$ pro $x \in (0,1)$, $n \in N$.

3/ Použijte Leviho větu .

(3)

4,6. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx = 0$!

1/ Využijte odhadu

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx + \int_1^\infty x^{-n}\, dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n \geq 2 .$$

2/ Limitní funkce f : $f(1) = \frac{1}{2}$; $f = 0$ jinde v $(0, +\infty)$.

3/ Ukažte, že posloupnost $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ nekonverguje k f stejnoměrně v intervalu $(0, +\infty)$

(využijte výsledku z př. 4,5 anebo nespojitosti funkce f !)

Kdyby nicméně bylo $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \rightrightarrows f$ v $(0, +\infty)$, nemohli bychom stejně použít větu 20 (proč?).

Leb

4/ Použijte Lebesgueovu větu, vyjde

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x}{1+x^2}, \text{ tedy } g \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

(je okamžitě vidět, že $\int_0^{+\infty} f_1 = +\infty$), omezme se proto na $n \geq 2$,

potom $\sup\limits_{n\geq 2} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} = \dfrac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Vše si podrobně rozmyslete a proveďte !

5/ Použijte Leviho větu!

(8)

4,7. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} = 1$!

Leb $\quad$ $\|$ 1/ $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N \ ; \ x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} ,$$

$$n \geq 2 \ , \ x \in (1,+\infty) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^j \right]^{-1} \leq \left[\frac{1}{2}\, n\,(n-1)\,\frac{x^2}{n^2} \right]^{-1} \leq \frac{4}{x^2}$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu . $\|$

(5) **4,8.** Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \, dx = 0$!

Leb

$\|$ 1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0,+\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N$, $x \in (0,+\infty) \Rightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1+x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ $\|$.

Leb **4,9.** Buď $0 < A < +\infty$, potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,dx = 0$.

(4) $\|$ Použijte Lebesgueovu i Leviho ~~větu~~, využijte vztahu

$$x \in (0,A) \ , \ n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)} \ . \|$$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \to f \quad \text{na} \quad M \Longrightarrow \int_M f_n \longrightarrow \int_M f$$

Uveďme příklady

4,10. Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1 \rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ $\quad$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ $\quad$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1 \rangle$.

Potom a/ $f_n \to 0$ v $\langle 0,1 \rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1 \rangle$?

1/ Ukažte, že $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \boxed{\rightarrow 0}$ pro $n \rightarrow +\infty$ na intervalu $(0,1)$, ale nekonvergují tam stejnoměrně.

Poslední tvrzení dokažte

a/ tím, že ukážete $\sigma_n = \frac{1}{2}$,

b/ podrobně z následujících vztahů:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 1_-} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) \quad !$$

Leb 2/ Použijte Lebesgueovu větu:

"rychlý", ale "hrubý" odhad dává $\boxed{0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq 1}$ v $(0,1)$

anebo "lepší" odhad $0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \frac{x}{1+x^2}$ pro $x \in (0,1)$, $n \in N$.

3/ Použijte Leviho větu.

4,6. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx = 0$!

1/ Využijte odhadu

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx \leq \boxed{\int_0^1 x^n\, dx + \int_1^\infty x^{-n}\, dx} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n \geq 2 .$$

2/ Limitní funkce f : $\boxed{f(1) = \frac{1}{2} \; ; \; f = 0}$ jinde v $(0, +\infty)$.

3/ Ukažte, že posloupnost $\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ nekonverguje k f stejnoměrně v intervalu $(0, +\infty)$

(využijte výsledku z př. 4,5 anebo nespojitosti funkce f !)

Kdyby nicméně bylo $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \rightrightarrows f$ v $(0, +\infty)$, nemohli bychom stejně použít větu 20 (proč?).

Leb 4/ Použijte Lebesgueovu větu, vyjde

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \boxed{\frac{x}{1+x^2}}, \text{ tedy } g \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

(je okamžitě vidět, že $\int_0^{+\infty} f_1 = +\infty$), omezme se proto na $n \geq 2$,

potom $\sup_{n\geq 2} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \boxed{\frac{x^2}{1+x^4}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Vše si podrobně rozmyslete a proveďte !

5/ Použijte Leviho větu!

4,7. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} = 1$!

Leb $\quad$ 1/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N\ ;\ x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leqq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x}}\ ,$$

$$n \geqq 2\ ,\ x \in (1, +\infty) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leqq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot (\tfrac{x}{n})^j\right]^{-1} \leqq \left[\frac{1}{2}\, n\,(n-1)\, \frac{x^2}{n^2}\right]^{-1} \leqq \frac{4}{x^2}$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu .

(5) **4,8.** Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x\, dx = 0$!

Leb

1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0, +\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N$, $x \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1 + x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Leb **4,9.** Buď $0 < A < +\infty$, potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\, dx = 0$.

(4) Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A)\ ,\ n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leqq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)}\ .$$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{na } M \Longrightarrow \int_M f_n \longrightarrow \int_M f$$

Uveďme příklady

4,10. Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1\rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ $\quad$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ $\quad$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$.

Potom a/ $f_n \to 0$ v $\langle 0,1\rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1\rangle$?

Podle Leviho věty (provádějte vše podrobně !) jest

$$\lim_{\alpha \to 1_-} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(\alpha - \sin x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(1-\sin x)} \quad \text{a}$$

poslední integrál je roven $-\infty$. ||

Lze v tomto příkladě též užít Lebesgueovu větu?

4,20. Ukažte, že $\lim_{k \to +\infty} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x} dx = 0$ pro libovolné $a \in E_1$!

|| Zvolte posloupnost k_n, $k_n > 0$, $k_n \nearrow +\infty$. Ukažte, že posloupnost funkcí $e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x}$ není monotonní v intervalu $(0,+\infty)$, nelze tedy užít přímo Leviho větu.

Zřejmě však platí

$$\left| e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right| \leqq e^{-k_1 x} \frac{|\sin ax|}{x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

tedy Lebesgueova věta dává

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\infty} e^{-k_n x} \frac{\sin ax}{x} dx = \int_0^{\infty} \lim_{n \to \infty} e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x} dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0 .$$

Příklady tohoto druhu však nemusíme vždy řešit automaticky pomocí Leviho či Lebesgueovy věty, leckdy můžeme postupovat přímo.

Ke příkladu, položíme-li $C(a) = \max_{x \in (0,+\infty)} \frac{|\sin ax|}{x}$ pro $a \in E_1$,

jest

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} dx \right| \leqq \int_0^{\infty} \left| e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right| dx \leqq C(a) \int_0^{\infty} e^{-kx} dx = \frac{C(a)}{k} ,$$

odkud snadno plyne naše tvrzení . ||

4,21. Dokažte, že $\lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx = 0$!

|| 1/ Ukažte, že $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow \alpha \in \langle 0,+\infty)$.

2/ použijte Lebesgueovu i Leviho větu ,

3/ využijte též odhadu

$$0 \leqq \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx \leqq \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \quad . ||$$

4,22. Dokažte, že $\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n} dx = 1$!

|| 1/ Použijte Lebesgueovu větu a vztahu

$$n \geqq 1, \; x \in (0,+\infty) \Longrightarrow e^{-x^n} \leqq \phi(x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

kde $\phi(x) = 1$ pro $x \in (0,1\rangle$, $\phi(x) = e^{-x}$ pro $x \in (1,+\infty)$,

2/ použijte Leviho větu - tuto nemůžete použít přímo na celý interval $(0,+\infty)$, ale lehko ji lze aplikovat zvlášť na intervaly $(0,1)$ a $(1,+\infty)$, zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-x^n}\,dx = 1\ ,\quad \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty e^{-x^n}\,dx = 0 \ .\ \|$$

4,23. Řešte následující příklady .

1/ Zkoumejte, zda lze provést limitní přechod za integračním znamením v následujících příkladech (tj. zkoumejte, zda platí

$$\int_M \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\ )\ :$$

a/ $f_n(x) = 1$ pro $x \in (n,+\infty)$, $f_n(x) = 0$ jinde v E_1 , $M = E_1$,

b/ $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $M = \langle 0,1\rangle$,

c/ $f_n(x) = n\,x^{-nx^2}$, $M = (0,1)$,

d/ $f_n(x) = nx\,e^{-nx^2}$, $M = (0,1)$, $(1,+\infty)$, $(0,+\infty)$

2/ Spočítejte následující limity:

a/ $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^\infty e^{-xy} \cos x\,dx$,

b/ $\lim\limits_{a\to 0_+} \int_0^1 \dfrac{a^{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$,

c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt$,