4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Záměna limity a integrálu 1)**.** Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost **spojitých** funkcí na intervalu $[a, b)$, konvergující na tomto intervalu **bodově**. Jestliže má posloupnost $\{f_n\}$ **integrovatelnou majorantu na** $[a, b)$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 2 (Záměna limity a integrálu 2)**.** Nechť $\{f\}$ je **spojitá** funkce na intervalu $[a, b) \times M$. Má-li $f(x, y)$ **integrovatelnou majorantu na** $[a, b)$ vzhledem k $y \in M$, pak pro $y_0 \in \bar{M}$ platí

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 3 (Spojitost integrálu s parametrem)**.** Nechť $\{f\}$ je **spojitá** funkce na intervalu $[a, b) \times J$ a integrál $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ **existuje pro každé** $y \in J$.

1. Má-li $f(x, y)$ **integrovatelnou majorantu na** $[a, b)$ vzhledem k $y \in M$, pak funkce $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ je na J spojitá.
2. Nechť f je **omezená spojitá** funkce definovaná na **omezeném** intervalu $I \times J$. Pak funkce $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ je na J spojitá.

Věta 4. Funkce f je spojitá v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0] \subset (p, q)$.

Funkce f je spojitá v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $(p_0, q_0] \subset (p, q)$.

Funkce f je spojitá v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0) \subset (p, q)$.

Pro intervaly $(a, b]$ věty platí taky.

Příklady

Změňte pořadí integrace

1. $$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
2. $$\int_{-6}^2 \int_{-1+x^2/4}^{2-x} f(x, y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
3. $$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
4. $$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

5.
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

1.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$

3. Volte majorantu až pro $n \geq 2$,
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$

4.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,\mathrm{d}x \qquad 0 < A < \infty$$

5. Použijte odhad $\frac{\ln(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq (1+x)$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

6.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x \qquad a\in\mathbb{R}$$

7.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$$

8.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{x}{n})^n\cdot\sqrt[n]{x}}$$

1. Ukažte, že funkce F
$$F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-yx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $[0,\infty)$ a určete
$$\lim_{y\to\infty} F(y).$$

2. Ukažte, že funkce F
$$F(y) = \int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $(0,1)$.

3. Určete
$$\lim_{a\to 0+} F(a),$$
kde
$$F(y) = \int_0^\pi \frac{\ln(1+y\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$
$y\in(0,\infty)$.

4. Ukažte, že funkce F
$$F(y) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+y^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$
je spojitá v intervalu $(-\infty,\infty)$.

5. Určete

$$\lim_{a \to 0+} F(a),$$

kde

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y^{x^2+1}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

$y \in (0, \infty)$.

6. Ukažte, že funkce F

$$F(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

(tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.

7. Ukažte, že funkce F

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{x}{2 + x^y}\,\mathrm{d}x,$$

je spojitá v intervalu $(2, \infty)$.

8. Ukažte, že funkce F

$$F(y) = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^y}\,\mathrm{d}x,$$

je spojitá v intervalu $(1, \infty)$.

9. Ukažte, že funkce F

$$F(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x - y)\,\mathrm{d}x,$$

je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.