2.3.5 Substituce do zobecněných sférických souřadnic

Nechť $a, b, c > 0$ jsou daná čísla. Uvažujme zobrazení

$$x = a \cdot \rho \cos\varphi \cos\vartheta,$$
$$y = b \cdot \rho \sin\varphi \cos\vartheta,$$
$$z = c \cdot \rho \sin\vartheta,$$

kde

$$\rho \geqq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi) \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi) \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi) \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$
$$\vartheta \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle.$$

Podobně jako u klasických sférických souřadnic můžeme i zde vypočítat Jacobián zobrazení

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = abc \cdot \rho^2 \cos\vartheta.$$

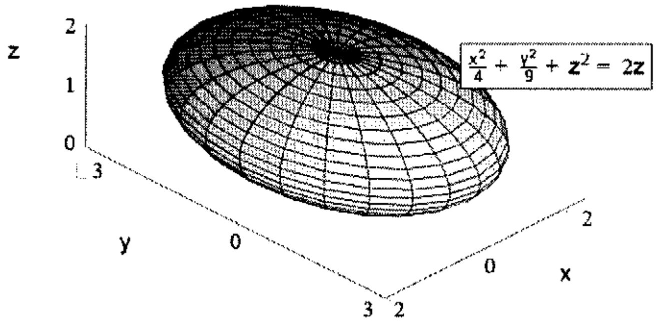
Poznámka 2.25. Substituce do zobecněných sférických souřadnic se používá, pokud těleso Ω, přes které integrujeme, má tvar elipsoidu.

(4.)

Příklad 2.26. Vypočtěte integrál $I = \iiint\limits_{\Omega} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqq 2z \right\}.$$

Řešení. Podmínku $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqq 2z$ lze ekvivalentně upravit do tvaru $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z - 1)^2 \leqq 1$. Odtud je vidět, že Ω je elipsoid se středem v bodě $(0, 0, 1)$ a poloosami 2, 3 a 1.



Použijeme zobecněné sférické souřadnice

$$x = 2\rho \cos\varphi \cos\vartheta,$$
$$y = 3\rho \sin\varphi \cos\vartheta,$$
$$z = \rho \sin\vartheta.$$

Jacobián tohoto zobrazení je zřejmě $J = 6\rho^2\cos\vartheta$. Dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqq 2z$ dostaneme $\rho^2 \leqq 2\rho\sin\vartheta$. Není těžké si uvědomit, že elipsoid Ω je pak určen omezeními

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2\sin\vartheta \rangle.$$

To tedy znamená, že

$$I = \iiint\limits_M \rho\sin\vartheta \cdot J \, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta = \iiint\limits_M 6\rho^3 \sin\vartheta\cos\vartheta \, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta,$$

kde

$$M = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \ \wedge\ 0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2} \ \wedge\ 0 \leqq \rho \leqq 2\sin\vartheta \right\}.$$

Odtud podle vět 2.10 a 1.22 máme

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\sin\vartheta} 6\rho^3 \sin\vartheta\cos\vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta \left[\frac{6\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{2\sin\vartheta} d\vartheta = 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^5\vartheta\cos\vartheta \, d\vartheta = \begin{array}{c} \text{substituce} \\ \sin\vartheta = u \\ \cos\vartheta\, d\vartheta = du \\ 0 \mapsto 0;\ \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{array} =$$

$$= 48\pi \int_0^1 u^5 \, du = 48\pi \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 = 48\pi \cdot \frac{1}{6} = 8\pi.$$

4.

Jiná možnost, jak integrál spočítat, je použít „posunuté" zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 2\rho\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= 3\rho\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= 1 + \rho\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je opět $J = 6\rho^2\cos\vartheta$ a dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 \leqq 2z$, která je ekvivalentní s nerovností $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+(z-1)^2 \leqq 1$, obdržíme $\rho^2 \leqq 1$, tj. $0 \leqq \rho \leqq 1$. Odtud (podobně jako u prvního způsobu výpočtu) dostaneme, že

$$I = \iiint\limits_N (1 + \rho\sin\vartheta) \cdot J \, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta = \iiint\limits_N (1 + \rho\sin\vartheta) \cdot 6\rho^2\cos\vartheta \, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta,$$

kde

$$N = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2} \ \wedge\ 0 \leqq \rho \leqq 1 \right\}.$$

4.

Podle vět 2.10 a 1.22 pak pro integrál I platí

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 3\rho^3 \sin 2\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[6\rho^2 \sin \vartheta - \frac{3}{2}\rho^3 \cos 2\vartheta \right]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^1 12\rho^2 \, \mathrm{d}\rho = 24\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= 24\pi \cdot \frac{1}{3} = 8\pi.$$

▲

2.4 Některé aplikace trojného integrálu

2.4.1 Objem tělesa

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelná množina. Pak objem tělesa M definujeme pomocí vztahu

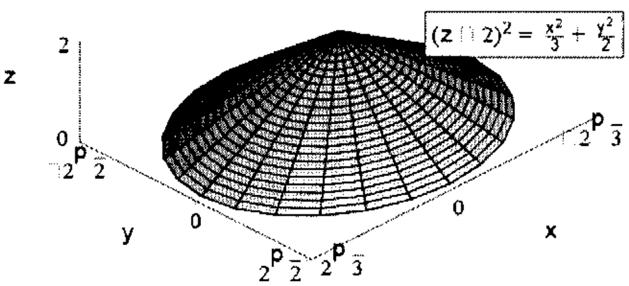
$$\lambda(M) = \iiint\limits_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Poznámka 2.27. Uvažujme množinu T stejnou jako v kapitole 1.6.2. Pak zřejmě platí $V(T) = \lambda(T)$.

Příklad 2.28. Vypočtěte objem tělesa $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ohraničeného plochami

$$(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}, \quad z = 0.$$

Řešení. Naše těleso M je částí eliptického kužele.



Jakobián transformace je

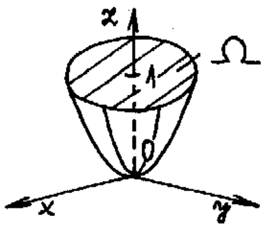
(9.)

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho\, \mathrm{d}x\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \varrho\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi = [x]_{-1}^{1} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi.$$

113. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2 + y^2 \le z \le 1$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.



(7.)

Obrázek 43: $\Omega : x^2 + y^2 \le z \le 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle \varrho^2, 1\rangle.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} \cdot \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2\,\mathrm{d}z)\mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2\,[z]_{\varrho^2}^1\,\mathrm{d}\varphi)d\varrho =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2(1-\varrho^2)\,\mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1 \varrho^2(1-\varrho^2)\,[\varphi]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi\left[\frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{5}\varrho^5\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi.$$

114. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 44.

(10.)

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\varrho \in \langle 0, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 4 - 2\varrho\rangle.$$

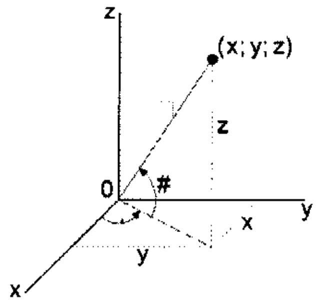
2.3.4 Substituce do sférických souřadnic

Uvažujme zobrazení

$$x = \rho \cos\varphi \cos\vartheta,$$
$$y = \rho \sin\varphi \cos\vartheta,$$
$$z = \rho \sin\vartheta,$$

kde

$$\rho \geqq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi) \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi) \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi) \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$
$$\vartheta \in \langle -\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\rangle.$$



Nyní přímým výpočtem (rozvojem podle posledního řádku) určíme Jacobián tohoto zobrazení. Platí

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\cos\vartheta & -\rho\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & \rho\cos\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\vartheta\left(\rho^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\right) + \rho\cos\vartheta\left(\rho\cos^2\vartheta\right) = \rho^2\cos\vartheta\left(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\right) = \rho^2\cos\vartheta.$$

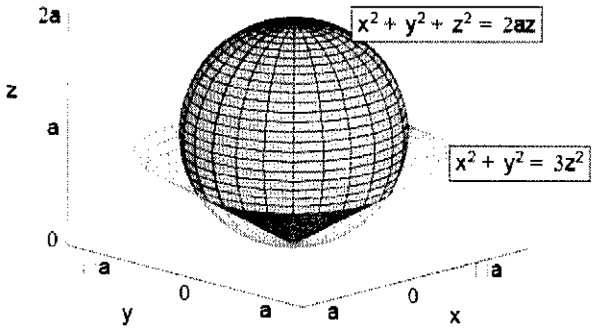
Poznámka 2.23. Pro substituci do sférických souřadnic se zpravidla rozhodneme, pokud hranice tělesa Ω, přes které integrujeme, obsahuje části kulových ploch.

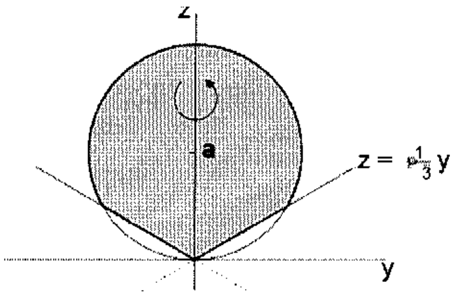
8

Příklad 2.24. Pro $a > 0$ vypočtěte integrál $I_a = \iiint\limits_{\Omega_a} (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde

$$\Omega_a = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2az \ \wedge\ x^2 + y^2 \leqq 3z^2\right\}.$$

Řešení. Podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2az$ lze upravit do tvaru $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqq a^2$. Množina Ω_a je tedy průnikem koule (se středem v bodě $(0, 0, a)$ a poloměrem a) a rotačního kužele (viz obrázek).





Zaveďme sférické souřadnice

$$x = \rho \cos\varphi \cos\vartheta,$$
$$y = \rho \sin\varphi \cos\vartheta,$$
$$z = \rho \sin\vartheta.$$

Uvědomme si ještě jednou, že

$$\rho \geqq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad \text{a} \quad \vartheta \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle.$$

Dosazením transformačních vztahů do podmínek

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2az \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 \leqq 3z^2$$

8.

obdržíme

$$\rho^2 \leqq 2a\rho \sin\vartheta \ \wedge\ \rho^2 \cos^2\vartheta \leqq 3\rho^2 \sin^2\vartheta,$$

odkud dostaneme ($\rho \geqq 0$)

$$\rho \leqq 2a \sin\vartheta \ \wedge\ \cos^2\vartheta \leqq 3\sin^2\vartheta.$$

Z první nerovnosti obdržíme $\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a z druhé následně $\cos\vartheta \leqq \sqrt{3}\sin\vartheta$. Celkem tedy máme

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2a \sin\vartheta \rangle.$$

Z vět 2.18, 2.10 a 1.22 pak plyne

$$I_a = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\sin\vartheta} \rho^2 \cdot \rho^2 \cos\vartheta \,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{2a\sin\vartheta} \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{2\pi}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \cdot 2^5 \cdot a^5 \cdot \sin^5\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \begin{array}{c} \text{substituce} \\ \sin\vartheta = u \\ \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}u \\ \frac{\pi}{6} \mapsto \frac{1}{2};\ \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{array} = \frac{2\pi}{5} \cdot 32a^5 \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^5 \,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{64}{5}\pi a^5 \left[\frac{u^6}{6} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{64}{5}\pi a^5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64} \right) = \frac{21}{10}\pi a^5.$$

▲

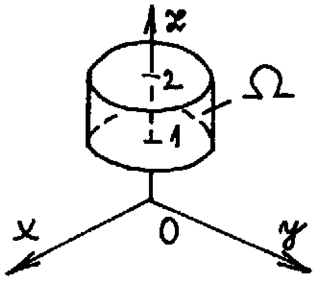
12 Trojný integrál - Transformace integrálů

111. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$.

Řešení Integrační obor Ω určený vztahy $1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$ je válec. Viz Obrázek 41. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$z \in \langle 1, 2 \rangle.$$

Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.



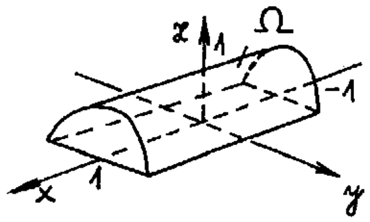
Obrázek 41: $\Omega : 1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} (\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi) \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^1 \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \mathrm{d}z = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

q.

112. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$.

Řešení Vztahy $-1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou x. Viz Obrázek 42.



Obrázek 42: $\Omega : -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$

Provedeme transformaci do „válcových souřadnic“. Transformační rovnice jsou tvaru

$$x = x,$$
$$y = \varrho \cos \varphi,$$
$$z = \varrho \sin \varphi.$$

9.

Jakobián transformace je

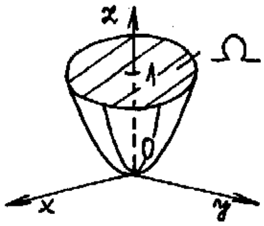
$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho\, \mathrm{d}x\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \cdot \int_{0}^{1} \varrho\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_{0}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = [x]_{-1}^{1} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\pi} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \pi.$$

113. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2+y^2 \le z \le 1$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2+y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.

7.



Obrázek 43: $\Omega : x^2+y^2 \le z \le 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle \varrho^2, 1\rangle.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi}\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2\,\mathrm{d}z)\mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2\,[z]_{\varrho^2}^1\,\mathrm{d}\varphi)d\varrho =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2(1-\varrho^2)\,\mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1 \varrho^2(1-\varrho^2)\,[\varphi]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi\left[\frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{5}\varrho^5\right]_0^1 = 2\pi\cdot\frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi.$$

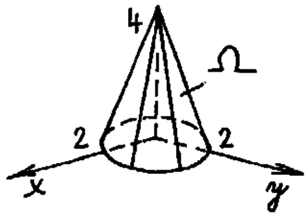
114. Příklad Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 44.

10.

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\varrho \in \langle 0, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 4-2\varrho\rangle.$$



Obrázek 44: $\Omega : 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$

10.

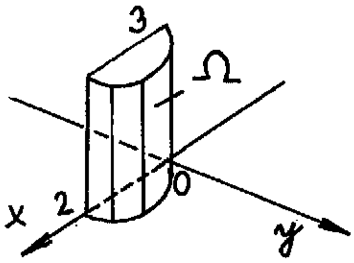
$$\iiint_{\Omega} z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} z\varrho \, d\varrho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = \int_0^2 (\int_0^{2\pi} (\int_0^{4-2\varrho} z\varrho \,\mathrm{d}z)\mathrm{d}\varphi) d\varrho = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-2\varrho} \varrho \,\mathrm{d}\varphi) d\varrho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\int_0^{2\pi} (4-2\varrho)^2 \varrho \,\mathrm{d}\varphi) d\varrho = \pi \int_0^2 (4-2\varrho)^2 \varrho \,\mathrm{d}\varrho = \frac{16}{3}\pi.$$

115. Příklad Spočtěte $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2};\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : z = 0, z = 3, y \geq 0, x^2+y^2-2x = 0$.

Řešení Vztah $x^2+y^2 = 2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2+y^2 = 1$. Odtud a ze vztahů $z = 0, z = 3, y \leq 0$ plyne, že Ω je polovina válce. Viz Obrázek 45. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 2\cos\varphi \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$$
$$z \in \langle 0, 3 \rangle.$$



Obrázek 45: $\Omega : z = 0, z = 3, y \geq 0, x^2+y^2-2x = 0$

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} z\varrho^2 \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{2\cos\varphi} (\int_0^3 z\varrho^2 \, dz) d\varrho)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{2\cos\varphi} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^3 \varrho^2 \, d\varrho)\mathrm{d}\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 8.$$

Poznámka 2.29. V předchozím příkladu bychom také mohli postupovat tak, že bychom (pro vhodná a, b) zavedli tzv. zobecněné cylindrické souřadnice, tj.

$$\begin{aligned} x &= a \cdot r \cos t, \\ y &= b \cdot r \sin t, \\ z &= z^*(= z), \end{aligned}$$

kde

$$r \geqq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi) \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi) \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi) \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{a} \quad z^* \in \mathbb{R}.$$

Jacobián tohoto zobrazení je

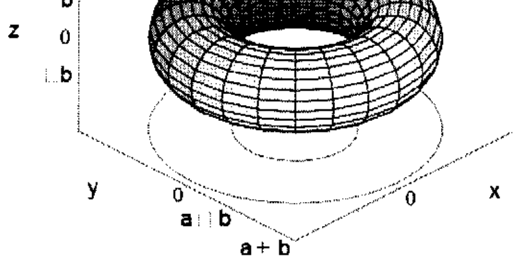
$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t & 0 \\ b \sin t & br \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab \cdot r \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = ab \cdot r.$$

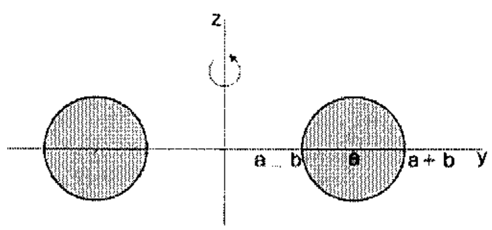
Domácí cvičení 2.30. Pokuste se vyřešit příklad 2.28 pomocí zobecněných cylindrických souřadnic (viz poznámka 2.29).

Příklad 2.31. Vypočtěte objem tělesa M ohraničeného plochou (anuloidem)

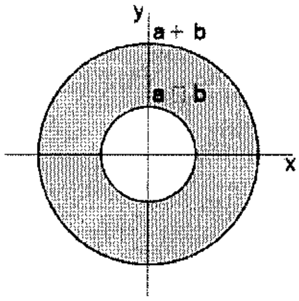
$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a).$$

Řešení.





Víme, že pro objem tělesa M platí $\lambda(M) = \iiint\limits_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$. Řezem tělesa M rovinou $z = 0$ je mezikruží znázorněné na obrázku níže.



Pro výpočet $\lambda(M)$ bude tedy vhodné použít v příslušném integrálu transformaci do cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = r$. Těleso M v těchto nových (cylindrických) souřadnicích popíšeme podmínkami (promyslete to!)

$$t \in \langle 0, 2\pi\rangle, \quad r \in \langle a-b, a+b\rangle, \quad z \in \left\langle -\sqrt{b^2-(r-a)^2}, \sqrt{b^2-(r-a)^2}\right\rangle.$$

Proto (vzhledem ke větám 1.22, 2.10 a 2.18) pro objem tělesa M platí

5.

$$\lambda(M) = \iiint\limits_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\int_{a-b}^{a+b} \left(\int_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t =$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{a-b}^{a+b} r\sqrt{b^2-(r-a)^2}\,\mathrm{d}r = \begin{array}{c} \text{substituce} \\ r-a=u \\ \mathrm{d}r = \mathrm{d}u \\ a-b \mapsto -b \\ a+b \mapsto b \end{array} = 4\pi \int_{-b}^{b} (u+a)\sqrt{b^2-u^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= 4\pi \int_{-b}^{b} \underbrace{u\sqrt{b^2-u^2}}_{\text{lichá v } u} \mathrm{d}u + 4\pi a \int_{-b}^{b} \underbrace{\sqrt{b^2-u^2}}_{\text{sudá v } u} \mathrm{d}u = 8\pi a \int_0^b \sqrt{b^2-u^2}\,\mathrm{d}u =$$

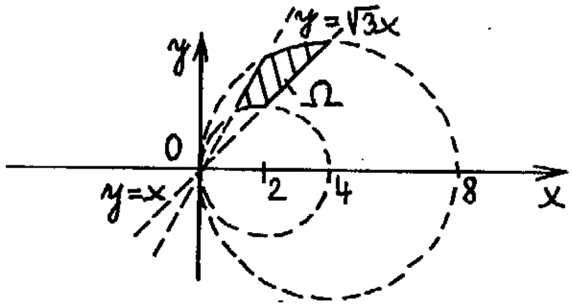
$$= \begin{array}{c} \text{substituce} \\ u = b\sin s \\ \mathrm{d}u = b\cos s\,\mathrm{d}s \\ 0 \mapsto 0,\ b \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} = 8\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - b^2\sin^2 s} \cdot b\cos s\,\mathrm{d}s = 8\pi a b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s\,\mathrm{d}s =$$

$$= 8\pi a b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2s}{2}\,\mathrm{d}s = 8\pi a b^2 \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin 2s}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \right) = 2\pi^2 a b^2.$$

13 Aplikace vícerozměrných integrálů

121. Příklad Spočtěte obsah rovinného obrazce M ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$.

Řešení Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x-4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz Obrázek 51.



Obrázek 51: M: $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

Obsah obrazce M určíme ze vztahu $S(M) = \iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Protože Ω je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},$$
$$4\cos\varphi \le \varrho \le 8\cos\varphi.$$

Platí

$$\iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M^*} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\varrho^2\right]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 12\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + 3\sqrt{3} - 6.$$

11.

122. Příklad Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahy $x^2 + y^2 \le z^2, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$.

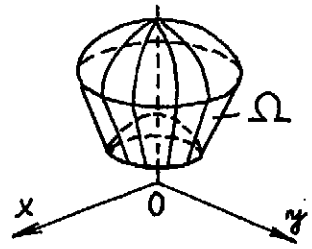
Řešení Oblast Ω je ohraničena kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz Obrázek 52. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 1, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle.$$

Objem tělesa Ω určíme ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_1^2 \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3}\cdot 2\pi \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{3}\pi(2-\sqrt{2}).$$

11.



Obrázek 52: $\Omega : x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$

123. Příklad Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahem $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - (x^2+y^2)$.

Řešení Oblast Ω je ohraničena zhora paraboloidem $z = 6 - (x^2 + y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 53. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protnou. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2+y^2} = 6 - (x^2+y^2)$. Máme $x^2 + y^2 + \sqrt{x^2+y^2} - 6 = 0$. Zavedeme substituci $z = x^2 + y^2$. Odtud $z^2 + z - 6 = 0$ a $(z-2)(z+3) = 0$. Řešení $z = -3$ nevyhovuje. Platí tedy $z = 2$. Ve výšce $z = 2$ protne paraboloid kužel v kružnicim $x^2 + y^2 = 4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že

$$\varrho \in \langle 0, 2 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$z \in \langle \varrho, 6 - \varrho^2 \rangle.$$

Objem tělesa Ω určíme opět ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

12.

Obrázek 53: $\Omega : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - (x^2+y^2)$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_{\varrho}^{6-\varrho^2} \varrho \,\mathrm{d}z \Big)\mathrm{d}\varphi \Big)\mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} [z\varrho]_{\varrho}^{6-\varrho^2} \,\mathrm{d}\varphi \Big)\mathrm{d}\varrho =$$
$$= 2\pi \int_0^2 (6\varrho - \varrho^2 - \varrho^3)\mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[3\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{4}\varrho^4 \right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

124. Příklad Spočtěte velikost povrchu části paraboloidu $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, kde $f(x,y) \geq 0$.

Řešení Velikost povrchu S paraboloidu určíme ze vztahu $S = \iint_M \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = -2x, f'_y = -2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$

Viviani

6. $x^2+y^2+z^2 \le 16$

$x^2+y^2 \le 4y$

$x^2+(y-2)^2 \le 4$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

$J_\varphi = r$

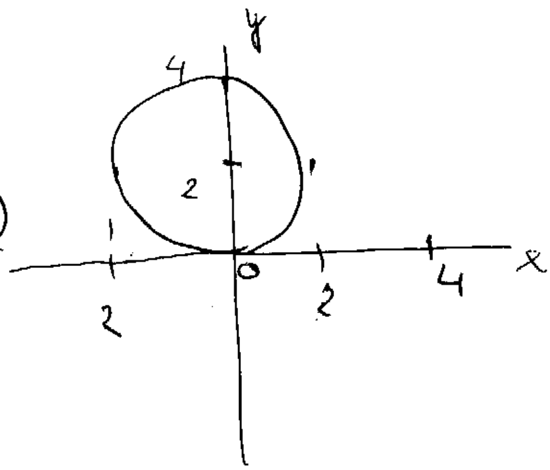
$r^2+z^2 \le 16$

$0 \le r^2 \le 4r\sin\varphi$

$0 \le r \le \sin\varphi$

$\underline{\varphi \in (0, \pi)}$

$r \in (0, \sin\varphi)$



$z^2 \le 16 - r^2$

$-\sqrt{16-r^2} \le z \le \sqrt{16-r^2}$

mne je sym. přes osu z, tedy

$$2\int_0^{\pi}\int_0^{4\sin\varphi}\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r \; dz\,dr\,d\varphi = 2\iint r\sqrt{16-r^2}\;dr\,d\varphi =$$

$\varphi \quad r \quad z$

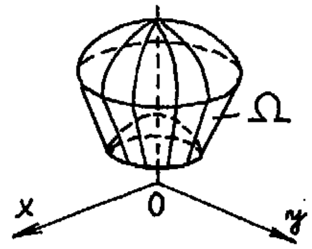
$$=2\int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(16-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4\sin\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\pi} -\frac{1}{3}\big(\overbrace{16-16\sin^2\varphi}^{16\cos^2\varphi}\big)^{3/2}+\frac{1}{3}(16)^{3/2}\;d\varphi$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^{\pi} 64\left(\cos^2\right)^{3/2} - 64\;d\varphi \overset{D}{=} -\frac{64\cdot 2}{3}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi - 64\;d\varphi$$

$$= -\frac{256}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)-1 = -\frac{256}{3}\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi-\varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{256}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$$

11.



Obrázek 52: $\Omega : x^2 + y^2 \le z^2, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$

123. Příklad Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahem $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6 - (x^2+y^2)$.

Řešení Oblast Ω je ohraničena zhora paraboloidem $z = 6 - (x^2+y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 53. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protnou. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2+y^2} = 6 - (x^2+y^2)$. Máme $x^2 + y^2 + \sqrt{x^2+y^2} - 6 = 0$. Zavedeme substituci $z = x^2 + y^2$. Odtud $z^2 + z - 6 = 0$ a $(z-2)(z+3) = 0$. Řešení $z = -3$ nevyhovuje. Platí tedy $z = 2$. Ve výšce $z = 2$ protne paraboloid kužel v kružnicim $x^2 + y^2 = 4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 2\rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle, \\ z &\in \langle \varrho, 6 - \varrho^2\rangle. \end{aligned}$$

Objem tělesa Ω určíme opět ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

12.

Obrázek 53: $\Omega : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6 - (x^2+y^2)$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\varrho}^{6-\varrho^2} \varrho\, \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} [z\varrho]_{\varrho}^{6-\varrho^2}\, \mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\varrho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 (6\varrho - \varrho^2 - \varrho^3)\mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[3\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{4}\varrho^4\right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

124. Příklad Spočtěte velikost povrchu části paraboloidu $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, kde $f(x,y) \ge 0$.

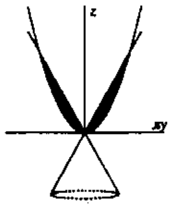
Řešení Velikost povrchu S paraboloidu určíme ze vztahu $S = \iint_M \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je kruh $x^2 + y^2 \le 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = -2x, f'_y = -2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$

4.

***Příklad* 336.** $z = 2(x^2+y^2),\ z^2 = 16(x^2+y^2)$

Řešení :



$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \big(\text{použijeme cylindrické souřadnice}\big).$$

$$\left[\begin{array}{lccc} x = r\cos\varphi & | & 2(x^2+y^2) \le z \le 4\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow & 2r^2 \le v \le 4r \\ y = r\sin\varphi & & 2r^2 \le 4r & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = v & & r \le 2 \longrightarrow & 0 \le r \le 2 \\ J = r & & & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2\Big(\int_{2r^2}^{4r} r\,dv\Big)\,dr\Big)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^2 r(4r-2r^2)\,dr = 2\pi\cdot\Big[\frac{4}{3}r^3 - \frac{2r^4}{4}\Big]_0^2 =$$

$$= \frac{16}{3}\pi.$$

■

***Příklad* 337.** $z = 1 - x^2 - 4y^2,\ z = 0$

Řešení : Plocha $z = 1 - x^2 - 4y^2$ je eliptickým paraboloidem s vrcholem v bodě $[0,0,1]$.

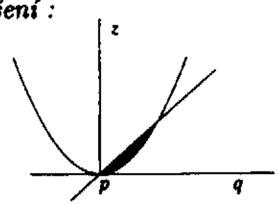
$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+4y^2\le 1}\Big(\int_0^{1-x^2-4y^2} dz\Big)\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+4y^2\le 1}\Big(1-x^2-4y^2\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \left[\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le 1 \\ y = \frac{r}{2}\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = \frac{r}{2} & & \end{array}\right] = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 (1-r^2)\cdot\frac{r}{2}\,dr\Big)\,d\varphi = \frac{2\pi}{2}\Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

■

***Příklad* 338.** $z = x^2 + y^2,\ z = x + y$

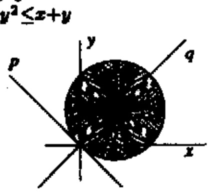
Řešení :



$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \left[\begin{array}{c} x^2+y^2 \le z \le x+y \\ (x,y) \in \{x^2+y^2 \le x+y\} \end{array}\right] =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le x+y}\Big(\int_{x^2+y^2}^{x+y} dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le x+y}\Big(x+y-x^2-y^2\Big)\,dx\,dy = \left[\begin{array}{c} x+y-x^2-y^2 = \frac{1}{2} - \big(x-\frac{1}{2}\big)^2 - \big(y-\frac{1}{2}\big)^2 \\ x^2+y^2 \le x+y \longrightarrow \big(x-\frac{1}{2}\big)^2 - \big(y-\frac{1}{2}\big)^2 \le \frac{1}{2} \end{array}\right] =$$



$$= \left[\begin{array}{lcl} x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi & & 0 \le r \le \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{1/2}}\Big(\frac{1}{2} - r^2\Big) r\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\Big[\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{1/2}} = 2\pi\cdot\Big(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\Big) = \frac{\pi}{8}.$$

■

***Příklad* 339.** Určete hmotnost a x-ovou souřadnici těžiště tělesa omezeného rovinami $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1,$ je-li hustota $\varrho = 1$.

Řešení : Hmotnost tělesa při $\varrho = 1$ se rovná objemu.

Podle vět 2.10 a 1.22 pak pro integrál I platí

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 3\rho^3 \sin 2\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[6\rho^2 \sin \vartheta - \frac{3}{2}\rho^3 \cos 2\vartheta \right]_{\vartheta = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^1 12\rho^2 \, \mathrm{d}\rho = 24\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= 24\pi \cdot \frac{1}{3} = 8\pi.$$

▲

2.4 Některé aplikace trojného integrálu

2.4.1 Objem tělesa

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelná množina. Pak objem tělesa M definujeme pomocí vztahu

$$\lambda(M) = \iiint_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

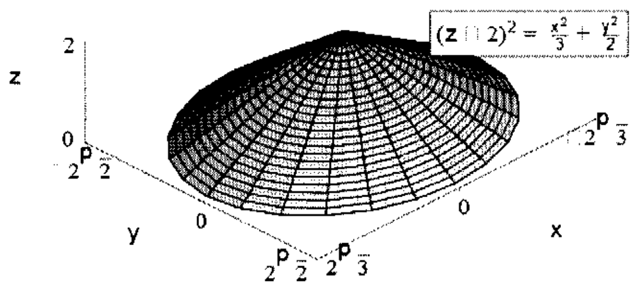
Poznámka 2.27. Uvažujme množinu T stejnou jako v kapitole 1.6.2. Pak zřejmě platí $V(T) = \lambda(T)$.

5.

Příklad 2.28. Vypočtěte objem tělesa $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ohraničeného plochami

$$(z - 2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}, \qquad z = 0.$$

Řešení. Naše těleso M je částí eliptického kužele.



Jeho průnikem s rovinou $z = z_0$, kde $0 \leqq z_0 \leqq 2$, je množina

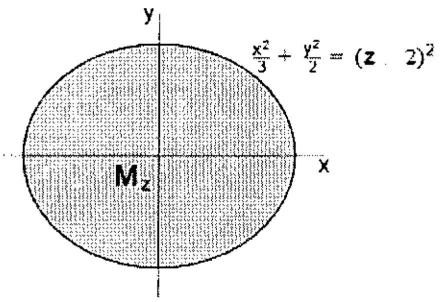
$$\left\{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leqq (z_0 - 2)^2\right\} \qquad \text{(tj. elipsa).}$$

Není obtížné si uvědomit, že pro objem tělesa M platí (viz věta 2.10)

$$\lambda(M) = \iiint\limits_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^2 \left(\iint\limits_{M_z} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z,$$

kde

$$M_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leqq (z - 2)^2\right\}.$$



Pro výpočet vnitřního integrálu $\iint\limits_{M_z} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic

$$x = \sqrt{3} \cdot r \cos t,$$
$$y = \sqrt{2} \cdot r \sin t.$$

Jacobián tohoto zobrazení je zřejmě $J = \sqrt{6} \cdot r$. Přitom množinu M_z (pro $z \in \langle 0, 2 \rangle$) lze v těchto zobecněných polárních souřadnicích popsat nerovnostmi

$$0 \leqq t \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq r \leqq 2 - z.$$

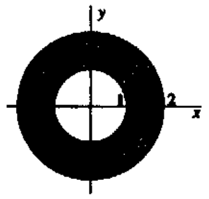
Odtud a z vět 1.30 a 1.22 plyne, že

$$\lambda(M) = \iiint\limits_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^2 \left(\iint\limits_{M_z} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{2-z} \sqrt{6} \cdot r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}z = 2\pi \int\limits_0^2 \left[\sqrt{6} \cdot \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{2-z} \mathrm{d}z =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 \sqrt{6} \cdot \frac{(2-z)^2}{2} \,\mathrm{d}z = \pi\sqrt{6} \cdot \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8\pi\sqrt{6}}{3}.$$

▲

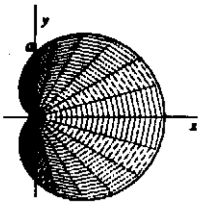


$$I_{[0,0]} = k\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = [\text{polární souřadnice}] = = k\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\,dr\,d\varphi = \frac{15}{2}\,k\pi.$$

■

***Příklad* 334.** Určete polohu těžiště obrazce omezeného **kardioidou** $r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$, $\varrho = 1$.

Řešení :



$$T = \Big[x_T, 0\Big], m = P_D = \iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi =$$

(viz př. 328)

$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\Big[\varphi + 2\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = a^2\pi + a^2\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\,a^2\pi,$$

$$M_y = \iint_D x\,dx\,dy = \Big[\text{polární souř.}\Big] = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\cos\varphi\,dr\Big)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot a^3(1+\cos\varphi)^3\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\Big(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi\Big)\,d\varphi =$$

$$= \frac{5}{4}\,a^3\pi; \qquad x_T = \frac{5\,a}{6}.$$

■

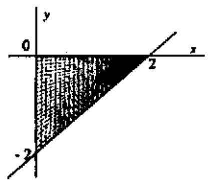
• Vypočítejte objem tělesa W omezeného plochami :

3

***Příklad* 335.** $z = x^2 + y^2 + 4,\ x - y = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

Řešení :

W je část trojbokého hranolu se základnou v rovině $z = 0$. Hranol je shora omezený rotačním paraboloidem.



$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \left[\begin{array}{ll} W: & 0 \le z \le x^2+y^2+4 \\ & x-2 \le y \le 0 \\ & 0 \le x \le 2 \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^2\Big(\int_{x-2}^0\Big(\int_0^{x^2+y^2+4} dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_0^2\Big(\int_{x-2}^0 (x^2+y^2+4)\,dy\Big)\,dx =$$

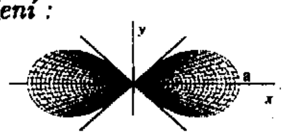
$$= \int_0^2\Big[x^2y + \frac{y^3}{3} + 4y\Big]_{x-2}^0\,dx = -\int_0^2\Big(x2(x-2) + \frac{(x-2)^3}{3} + 4(x-2)\Big)\,dx =$$

$$= -\Big[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{12} + 2x^2 - 8x\Big]_0^2 = \frac{32}{3}.$$

■

Příklad 326. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(x^2-y^2)$ **(Bernoulliova lemniskáta)**

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{bmatrix}.$$

Po dosazení do zadání dostáváme postupně : $r^4 = a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, $r^2 = a^2\cos 2\varphi$,

$0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi} \longrightarrow \cos 2\varphi \ge 0, \quad \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{7\pi}{4}, 2\pi\rangle.$

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr\right)d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi =$$

$$= 2a^2\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$ ■

Příklad 327. $\left(x^2+9y^2\right)^2 = x^2y$

Řešení : $P = \iint_D dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{r}{3}\sin\varphi \\ J = \frac{1}{3}r \end{bmatrix}$

$r^4 = r^2\cos^2\varphi \cdot \frac{r}{3}\sin\varphi$

$0 \le r \le \frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi$

$\cos^2\varphi\sin\varphi \ge 0 \longrightarrow 0 \le \varphi \le \pi$

$$P = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} \frac{1}{3}r\,dr\right)d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} d\varphi =$$

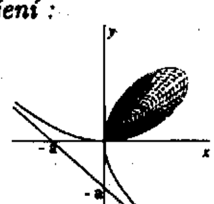
$$= \frac{1}{6}\int_0^{\pi}\frac{1}{9}\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{54}\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\varphi - \cos^6\varphi)\,d\varphi = \text{(Wallisova formule)} = \frac{1}{27}\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{864}.$$ ■

2.

Příklad 328. $(x^3+y^3) = 3axy$ **(Descartesův list)**

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le r(\varphi) \\ y = r\sin\varphi \;\mid & \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ J = r & \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_0^{r(\varphi)} r\,dr\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Nyní určíme $r(\varphi)$ a dosadíme do posledního integrálu.

$x^3+y^3 = 3axy \quad\longrightarrow\quad r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi = 3ar^2\cos\varphi\sin\varphi,$ takže

$$r(\varphi) = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad r(0) = r(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)^2}d\varphi =$$

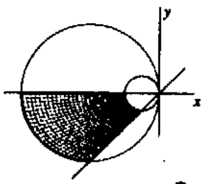
(čitatel a jmenovatel vydělíme $\cos^6\varphi$)

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{\left(\mathrm{tg}^3\varphi+1\right)^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\,\varphi = u \\ \frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = du \end{bmatrix} = \frac{9a^2}{2\cdot 3}\int_0^{\infty}\frac{3u^2}{(u^3+1)^2}\,du =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \lim_{C\to+\infty}\int_0^C \frac{3u^2}{(u^3+1)^2}\,du = \frac{3a^2}{2}\lim_{C\to+\infty}\left[\frac{-1}{u^3+1}\right]_0^C = \frac{3a^2}{2}\lim_{C\to+\infty}\left(\frac{-1}{C^3+1}+1\right) =$$
$$= \frac{3a^2}{2}. \qquad \blacksquare$$

Příklad 329. Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného křivkami
$$x^2+y^2+x=0,\ x^2+y^2+4x=0,\ y=x,\ y=0.$$

Řešení :



$$x^2+y^2+x=0 \longrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$
$$x^2+y^2+4x=0 \longrightarrow (x+2)^2+y^2=4$$

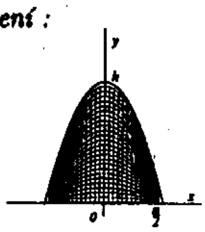
$$P = \iint_D dx\,dy = \left[\begin{array}{l|c} x = r\cos\varphi & x^2+y^2+x=0 \longrightarrow r=-\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi & x^2+y^2+4x=0 \longrightarrow r=-4\cos\varphi \\ J=r & -\cos\varphi \le r \le -4\cos\varphi \\ & \pi \le \varphi \le \frac{5}{4}\pi \end{array}\right] =$$

$$= \int_\pi^{\frac{5}{4}\pi}\left(\int_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi} r\,dr\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi}\left[r^2\right]_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi}d\varphi = \frac{1}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi}\left(16\cos^2\varphi-\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$
$$= \frac{15}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{15}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi}\frac{1+\cos2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{15}{4}\left[\varphi+\frac{\sin2\varphi}{2}\right]_\pi^{\frac{5}{4}\pi} =$$
$$= \frac{15}{4}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\sin\frac{5}{2}\pi}{2}-\pi-\frac{\sin2\pi}{2}\right) = \frac{15}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{15(\pi+2)}{16}. \qquad \blacksquare$$

Příklad 330. Je dána parabolická úseč s tětivou kolmou k ose. Délka tětivy je a, výška úseče h, a hustota $\varrho = 1$. Určete :

a) moment setrvačnosti úseče vzhledem k tětivě, b) těžiště úseče.

Řešení :



Analytické vyjádření této paraboly bude $y-h=px^2$. Použijeme-li bod $\left[\frac{a}{2},0\right]$, pak $-h=p\frac{a^2}{4} \longrightarrow p=\frac{-4h}{a^2} \longrightarrow$ $y=h-\frac{4h}{a^2}x^2$.

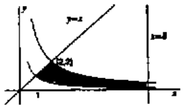
a) Moment setrvačnosti k tětivě je nyní momentem setrvačnosti vzhledem k ose x.

$$I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy = \left[\begin{array}{ll} D: & 0\le y\le h-\frac{4h}{a^2}x^2 \\ & -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\end{array}\right] = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} y^2\,dy\right)dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[y^3\right]_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2}dx = \frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(h-\frac{4h}{a^2}x^2\right)^3dx = \frac{h^3}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(1-\frac{4x^2}{a^2}\right)^3dx =$$
$$= \frac{2h^3}{3}\int_0^{\frac{a}{2}}\left(1-\frac{12x^2}{a^2}+\frac{48x^4}{a^4}-\frac{64x^6}{a^6}\right)dx = \frac{2h^3}{3}\left[x-\frac{4x^3}{a^2}+\frac{48x^5}{5a^4}-\frac{64x^7}{7a^6}\right]_0^{\frac{a}{2}} =$$
$$= \frac{2h^3}{3}\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+\frac{3a}{10}-\frac{a}{14}\right) = \frac{h^3a}{3}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{16\,h^3a}{105}.$$

b) $T=\left[0,y_T\right]$, $\quad y_T=\dfrac{M_x}{m}$

***Příklad* 323.** $xy = 1,\ xy = 4,\ y = x,\ x = 8$

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} dy \right) dx + \int_2^8 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{4}{x}} dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx + \int_2^8 \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln|x| \right]_1^2 +$$

$$+3\Big[\ln|x|\Big]_2^8 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 3(\ln 8 - \ln 2) = \frac{3}{2} + \ln\frac{8^3}{2 \cdot 2^3} =$$

$$= \frac{3}{2} + \ln 32. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 324.** Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného osou x a jedním obloukem cykloidy o parametrických rovnicích $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

Řešení :

Jeden oblouk cykloidy opíše bod kružnice, která se kotálí po přímce $y = 0$, tj. $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

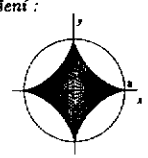
$$P = \iint_D dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_0^{2\pi} y\,\dot{x}\,dt = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt = a^2\Big[t - 2\sin t\Big]_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= a^2 \cdot 2\pi + \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + a^2\pi = 3\pi a^2. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 325.** Určete plošný obsah rovinného obrazce D omezeného asteroidou $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy$$

Použijeme transformace do souřadnic : $\boxed{\begin{cases} x = r\cos^3\varphi \\ y = r\sin^3\varphi \end{cases}}$

$$\left(r\cos^3\varphi\right)^{2/3} + \left(r\sin^3\varphi\right)^{2/3} = a^{2/3} \longrightarrow r^{2/3} = a^{2/3} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 \le r \le a \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{bmatrix},\quad J = \begin{vmatrix} \cos^3\varphi & -3r\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \sin^3\varphi & 3r\sin^2\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 3r\sin^2\varphi\cos^4\varphi + 3r\sin^4\varphi\cos^2\varphi =$$

$$= 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

$$P = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,dr \right) d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi \cdot 3\int_0^a r\,dr =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi}{4}\,d\varphi \cdot 3\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi \cdot \frac{3}{2}a^2 = \frac{3}{4}a^2\left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2. \qquad \blacksquare$$

- Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného uzavřenou křivkou :