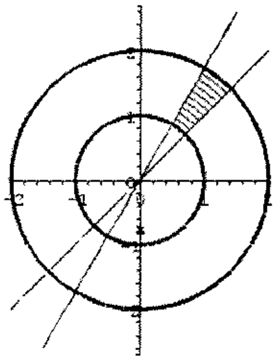
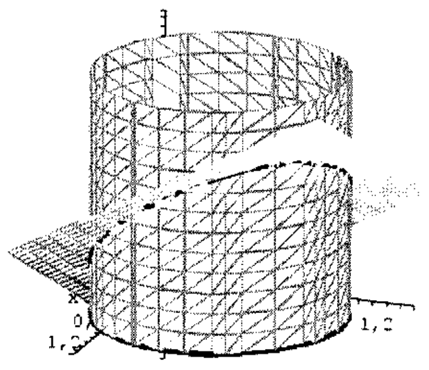


Obr. 7

6.

Řešení: Těleso, jehož objem máme nalézt, je část rotačního válce určeného řídicí kružnicí $x^2 + y^2 = x + y$, zdola ohraničeného rovinou $z = 0$ a shora rovinou $z = x + y$. (Obr.8)



Obr. 8

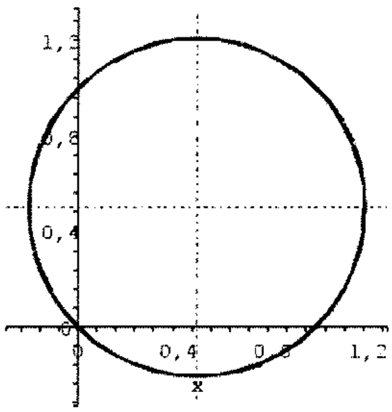
Jak víme již z příkladu 1.11, je objem takového tělesa číselně roven hodnotě dvojného integrálu $\int\limits_M (x + y)\,\mathrm{d}A$, kde

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le x + y\right\}.$$

Doplněním na čtverec a úpravou můžeme podmínku $x^2 + y^2 \le x + y$ upravit na tvar

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Z (5) je zřejmé, že množina M je kruh se středem v bodě $(1/2, 1/2)$ a poloměrem $\sqrt{2}/2$ (Obr. 9).



Obr. 9

Dvojný integrál $\int\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}A$ budeme opět počítat pomocí substituce do polárních souřadnic. (Tato substituce převádí integraci přes kruh na integraci přes dvojrozměrný interval.) V našem případě však „posuneme" těleso tak, aby střed řídicí kružnice byl počátek. Toho dosáhneme tak, že substituci do polárních souřadnic budeme volit ve tvaru

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\phi, \quad y = \frac{1}{2} + r\sin\phi \quad \text{a } J = r. \tag{6}$$

Dosazením do (5) dostaneme

$$\begin{gathered} 0 \le \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 \le \tfrac{1}{2}; \\ 0 \le \left(\tfrac{1}{2} + r\cos\phi - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2} + r\sin\phi - \tfrac{1}{2}\right)^2 \le \tfrac{1}{2}; \\ 0 \le r \le \tfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{gathered}$$

Pro ϕ jsme nedostali žádnou omezující podmínku, je tedy $0 \le \phi \le 2\pi$. Potom

$$\begin{aligned} \int\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}A &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \left(r + r^2(\cos\phi + \sin\phi)\right)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}(\cos\phi + \sin\phi)\right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}/2} \mathrm{d}\phi = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{12}(\cos\phi + \sin\phi)\right) \mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Při počítání objemu jsme mohli místo substituce pomocí „posunutých" polárních souřadnic (6) použít substituci (4). Dosazením (4) do podmínky $x^2+y^2 \le x+y$

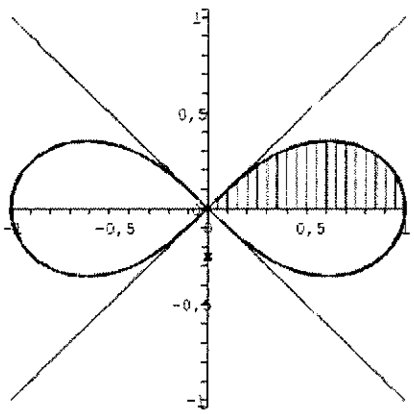
postupně dostaneme

$$0 \le r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \le r(\cos\phi + \sin\phi),$$
$$0 \le r \le (\cos\phi + \sin\phi).$$

Z podmínky $0 \le r \le \cos\phi + \sin\phi$ pak plyne $-\frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{3\pi}{4}$. Odtud

$$\int_M (x+y)\,\mathrm{d}A = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^{\cos\phi+\sin\phi} \left(r^2(\cos\phi + \sin\phi)\right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi =$$
$$= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos\phi + \sin\phi)^4 \,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2}\,.$$

V tomto případě je však výpočet posledního integrálu složitější než při substituci (6).



Obr. 10

Příklad 1.26. *Vypočítejme obsah množiny M, která je ohraničená lemniskátou $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ (Obr. 10).*

Řešení: Pro obsah množiny M platí

$$\mu(M) = \int_M \mathrm{d}A,$$

kde v našem případě je

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \le x^2 - y^2\right\}.$$

Z rovnice lemniskáty je vidět, že tato křivka je symetrická podle osy x i podle osy y (je sudá v obou proměnných). Při výpočtu obsahu plochy ohraničené touto

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy = \left[\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi & | & \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \\ J = r & & \end{array}\right] =$$

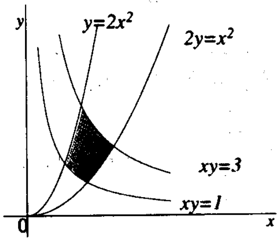
$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^a \ln(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^a \ln(1+r^2) r\,dr = \left[\begin{array}{c} 1+r^2 = t \\ 2r\,dr = dt \end{array}\right] =$$

$$= \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_1^{1+a^2} \ln t\,dt = \frac{\pi}{2}\Big[t\ln t - t\Big]_1^{1+a^2} = \frac{\pi}{2}\Big((1+a^2)\ln(1+a^2)+1\Big).$$

■

***Příklad* 303.** $\iint_D x^3\,dx\,dy$, kde D je množina ohraničená křivkami $xy=1$, $xy=3$, $y=\frac{x^2}{2}$, $y=2x^2$.

Řešení :



Použijeme transformaci $\left\{\begin{array}{l} xy = u \\ \frac{y}{x^2} = v \end{array}\right.$. Potom množina D bude mít vyjádření $1 \le u \le 3$, $\frac{1}{2} \le v \le 2$.

Nyní spočítáme x a y pomocí u a v a dále Jakobián

$$y = \frac{u}{x},\ y = vx^2,\quad \frac{u}{x} = vx^2 \longrightarrow x^3 = \frac{u}{v},\quad x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \longrightarrow y = v\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} = \sqrt[3]{u^2 v}\ ;$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}v^{-1} + \frac{2}{9}v^{-1} = \frac{1}{3v} \neq 0.$$

Užitím věty o substituci dostaneme

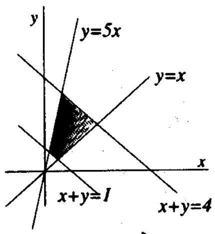
$$\iint_D x^3\,dx\,dy = \int_{1/2}^2 \left(\int_1^3 \frac{u}{v}\cdot\frac{1}{3v}\,du\right) dv = \frac{1}{3}\int_{1/2}^2 \frac{1}{v^2}\,dv \cdot \int_1^3 u\,du = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{v}\right]_{\frac{1}{2}}^2 \cdot \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 4 = 2.$$

■

***Příklad* 304.** $\iint_D (2x-y)\,dx\,dy$, $D: x+y=1,\ x+y=4,\ y=x,\ y=5x$

Řešení :



Nejvhodnější substituce bude následující

$$\left\{\begin{array}{c} x+y = u \\ \frac{y}{x} = v \end{array}\right\},\quad 1 \le u \le 4,\ 1 \le v \le 5.$$

Potom $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} \end{array}\right\}$; $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2} \neq 0;$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t\, dt$, $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Na závěr uvedeme příklady na užití sférických (kulových) souřadnic pro výpočet trojného integrálu.

$$\Phi: \quad \begin{array}{l} x = r\cos t \sin s \\ y = r \sin t \sin s \\ z = r\cos s \end{array} \qquad 0 \le r,\ 0 \le t < 2\pi,\ 0 \le s \le \pi\ .$$

Protože

$$\det D\Phi = \det \begin{pmatrix} \cos t \sin s & \sin t \sin s & \cos s \\ -r \sin t \sin s & r\cos t \sin s & 0 \\ r \cos t\ sins & r \sin t \cos t & -r \sin s \end{pmatrix} = r^2 \sin s\ ,$$

dostaneme

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos t\sin s, r\sin t \sin s, r\cos s)\cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds\ .$$

Poznamenejme, že v některých učebnicích se užívá odlišný tvar sférických souřadnic

$$\Phi: \quad \begin{array}{l} x = r\cos t \cos s \\ y = r \sin t \cos s \\ z = r\sin s \end{array} \qquad 0 \le r,\ 0 \le t < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le s \le \frac{\pi}{2}\ ,$$

pak ovšem vychází $\det D\Phi = r^2 \cos s$.

1

Příklad 8.17:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz \quad , \text{kde } \Omega = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0, \}\ .$$

řešení:

Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu Ω nám dává $1 \le r \le 3$, z dalších tří podmínek dostáváme $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ a $0 \le s \le \frac{\pi}{2}$, neboli $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,3\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz = \iiint_{\langle 1,3\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \frac{r\cos s}{\sqrt{r^2\cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s}} \cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds =$$

$$= \int_1^3 r^2\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s\, ds = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 \cdot [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{3}\pi\ .$$

2

Příklad 8.18:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2) z\, dxdydz \quad , \text{kde } \Omega = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le z^2,\ z \ge 0, \}\ .$$

řešení:

Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu Ω nám dává $1 \le r \le 2$. Z druhé podmínky dostaneme $r^2 \sin^2 s \le r^2 \cos^2 s$, neboli $\operatorname{tg} s \le 1$, což spolu s třetí podmínkou dává $0 \le s \le \frac{\pi}{4}$. Na proměnnou t není kladen žádný požadavek, a tedy $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,2\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2) z\, dxdydz = \iiint_{\langle 1,2\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle} \left(r^2\cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s\right) \cdot r\cos s \cdot r^2 \sin s\, dr\, dt\, ds =$$

$$= \iiint_{\langle 1,2\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle} r^5 \sin^3 s \cos s\, dr\, dt\, ds = \underbrace{\int_1^2 r^5\, dr}_{=\frac{21}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\, dt}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 s \cos s\, ds}_{=\frac{1}{4}} = \frac{21}{4}\pi\ .$$

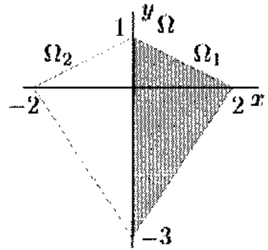
2

Uvedeme výpočet třetího integrálu (ostatní jsou zřejmé)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 s \cos s \, ds = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} w^3 \, dw = \left| \frac{w^4}{4} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4} \, .$$

užili jsme substituci $w := \sin s$, a tedy $\quad dw = \cos s \, ds \, , \quad 0 \quad 0$ a $\quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Příklad 8.19:
Zjistěte souřadnice těžiště rovinného útvaru na obrázku (je-li hmota rozložena stejnoměrně, neboli hustota je konstatní $\rho(x, y) = 1$).



řešení:
Nejprve vyjádříme jednotlivé části hranice Ω pomocí funkčních vztahů

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 \quad \text{(1. kvadrant)} \qquad y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{(2. kvadrant)}$$

$$y = -\frac{3}{2}x - 3 \quad \text{(3. kvadrant)} \qquad y = \frac{3}{2}x - 3 \quad \text{(4. kvadrant)} \, .$$

Protože útvar na obrázku je symetrický podle osy y, první souřadnice těžiště je zřejmě nulová $x_T = 0$.

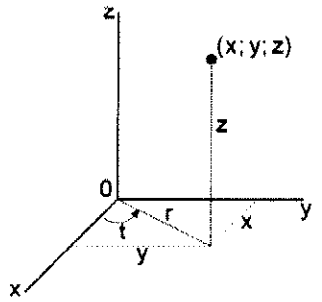
Pro výpočet druhé souřadnice budeme potřebovat dvojné integrály

$$m = \iint_\Omega 1 \, dxdy = 2 \iint_{\Omega_1} 1 \, dxdy \, , \quad \text{a} \quad M_y = \iint_\Omega y \, dxdy = \iint_{\Omega_1} y \, dxdy + \iint_{\Omega_2} y \, dxdy \, ,$$

první integrál vyjadřuje hmotnost, druhý tzv. statický moment. Převedeme tedy dvojný integrál na dvojnásobný pomocí Fubiniovy věty a dopočítáme kde

$$r \geqq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi) \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi) \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi) \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{a} \quad z^* \in \mathbb{R}.$$



Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t & 0 \\ \sin t & r \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = r.$$

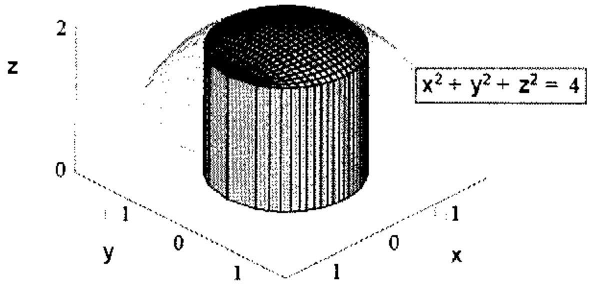
Poznámka 2.20. Substituci do cylindrických souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice půdorysu tělesa Ω, přes které integrujeme, obsahuje části kružnic. Samozřejmě, že vhodnost či nevhodnost substituce ovlivňuje také samotná integrovaná funkce.

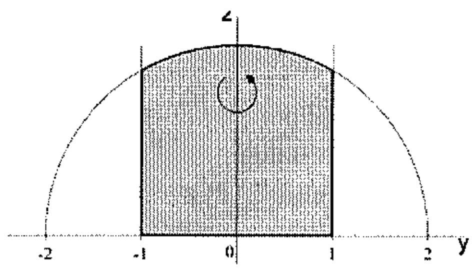
3

Příklad 2.21. Vypočtěte integrál $I = \iiint\limits_{\Omega} (x^4 + y^4)\, z \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leqq 1 \ \wedge \ z \geqq 0 \ \wedge \ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4\right\}.$$

Řešení. Množina Ω je válec „seříznutý" shora kulovou plochou.





Zavedeme-li válcové souřadnice

$$x = r \cos t,$$
$$y = r \sin t,$$
$$z = z,$$

obdržíme omezení

$$0 \leqq r \leqq 1, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq z \leqq \sqrt{4-r^2}.$$

Podle věty 2.18 tedy platí

$$I = \iiint\limits_{M_{rtz}} \left(r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t\right) z \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}z,$$

kde

$$M_{rtz} = \left\{(r, t, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 0 \leqq r \leqq 1 \ \wedge\ 0 \leqq t \leqq 2\pi \ \wedge\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{4-r^2}\right\}.$$

Užijeme-li nyní Fubiniovy věty (2.10 a 1.22), dostaneme

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{\sqrt{4-r^2}} \left(r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t\right) z \cdot r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r =$$

3

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \,\mathrm{d}t \cdot \int\limits_0^1 \left(r^5 \left(\int\limits_0^{\sqrt{4-r^2}} z \,\mathrm{d}z \right)\right) \mathrm{d}r = \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \,\mathrm{d}t \cdot$$