# 2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Teorie

**Definice 1** (Regulární zobrazení v prostoru)**.** Na otevřené množině $G$ jsou definovány funkce $x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \tau(u, v, w)$, které mají následující vlastnosti:

1. Funkce $\varphi, \psi, \tau$ mají spojité parciální derivace na $G$.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} & \frac{\partial\psi}{\partial w} & \frac{\partial\tau}{\partial w} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě $G$ nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi, \tau) : G \to \mathbb{R}^3$ je prostá.

Zobrazení $\Phi$ splňující předchozí vlastnosti se nazývá *regulární* a zobrazuje $G$ na otevřenou množinu. Uvedený determinant je *Jacobiho determinant* nebo *Jacobián* a značí se $J(\varphi, \psi, \tau)$.

**Věta 2** (Věta o substituci)**.** Nechť $(\varphi, \psi, \tau)$ je regulární zobrazení otevřené množiny $G$ na otevřenou množinu $H$ a $f$ je spojité absolutně integrovatelné zobrazení na $H$. Potom

$$\int_H f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_G f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \tau(u, v, w))|J(\varphi, \psi, \tau)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\,,$$

má-li jedna strana smysl.

**Postup výpočtů:**

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. volba substituce
2. ověření předpokladů věty (hlavně regularita)
3. výpočet $J_\varphi$
4. určení $\phi{-}1(M)$
5. výpočet integrálu
$$\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t$$

## Příklady

1. Spočtěte objem tělesa, které je ohraničeno plochami $x^2 + y^2 = x + y$, $z = x + y$ a $z = 0$.

2. Spočtěte
$$\int_M x^3 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
kde $M$ je množina ohraničená křivkami $xy = 1$, $xy = 3$, $y = x^2/2$, $y = 2x^2$.

Spočtěte

1. $$\int_M \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; x, y, z \geq 0\}$
osminka koule, sférické

2. $$\int_M (x^2 + y^2) z \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$
kužel, sférické

3. $$\int_M (x^4 + y^4) z \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
válec v kouli, válcové

4. $$\int_M z \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z\}$
elipsoid, sférické s posunutím

5. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochou (anuloid - torus) kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2\}$, $0 < b < a$.
anuloid, cylindrické

6. Spočtěte objem tělesa určeného vztahy
$$M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; x^2 + y^2 \leq 4y\}$$
Vivianiho okénko, cylindrické

7.
$$\int_M \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$

paraboloid

8.
$$\int_M x^2+y^2+z^2\mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 2az, x^2+y^2 \leq 3z^2\}$

kužel, sférické

9. Spočtěte míru množiny $M$ kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; -1 < x < 1, z > 0, y^2+z^2 \leq 1\}$

položený válec

10.
$$\int_M z\mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}\}$

kužel na podlaze

11. Spočtěte objem tělesa určeného vztahy kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

muffin, sférické

12. Spočtěte objem tělesa určeného vztahy $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-(x^2+y^2)\}$

kornout se zmrzlinou