1. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1 (Integrál funkce dvou proměnných)**.** Nechť je dána funkce $f(x,y)$ definovaná na množině A v rovině, jejíž projekce na osy souřadnic leží v intervalech J, K resp. Pro každé $x \in J$ (nebo $y \in K$) označíme $A_x = \{y \in \mathbb{R}; (x,y) \in A\}$, resp. $B_y = \{x \in \mathbb{R}; (x,y) \in A\}$.

Definujeme

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_J \Big(\int_{A_x} f(x,y)\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x\,, \int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_J \Big(\int_{B_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\mathrm{d}y\,,$$

pokud mají pravé strany smysl.

Pokud je $\int_A f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ vlastní číslo, říkáme, že $\int_A f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ *konverguje* nebo že funkce f je na A *integrovatelná.*

Pokud je $\int_A |f(x,y)|\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ vlastní číslo, říkáme, že $\int_A f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje nebo že funkce f je na A *absolutně integrovatelná.*

Věta 2 (Základní vlastnosti integrálu)**.**

1. Integrál funkcí dvou proměnných je lineární, tj.

$$\int_A (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \alpha \int_A f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \beta \int_A g(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,,$$

   má-li pravá strana smysl.

2. Jsou-li g, h funkce definované na A a $h \le g$ na A pak

$$\int_A h(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le \int_A g(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,, \text{ mají-li obě strany smysl.}$$

3. Jestliže $A = A_1 \cup A_2$ a projekce množin A_i na osu x leží v disjunktních intervalech, pak

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{A_1} f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,,$$

   pokud má jedna strana smysl.

Věta 3 (Nezávislost integrace na pořadí)**.** Nechť A je otevřená množina a f je absolutně integrovatelná a spojitá funkce na A. Potom

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Věta 4 (Regulární zobrazení)**.** Nechť G je otevřená množina v rovině a funkce $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ jsou definovány na G. Nechť jsou splněny následující podmínky:

1. Funkce φ, ψ mají spojité parciální derivace na G.

2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.

3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi) : G \to \mathbb{R}^2$ je prostá.

Potom Φ zobrazuje G na otevřenou množinu H.

Zobrazení mající uvedené vlastnosti z předchozí věty se nazývá *regulární zobrazení*.
Uvedený determinant se značí $J(\varphi, \psi)$ a nazývá *Jacobiho determinant* nebo stručněji *Jacobián*.

Věta 5 (Substituční věta)**.** Nechť (φ, ψ) je regulární zobrazení otevřené množiny G na otevřenou množinu H a f je spojité absolutně integrovatelné zobrazení na H. Potom

$$\int_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_G f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J(\varphi,\psi)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,,$$

jestliže má jedna strana smysl.

Postup výpočtů:
$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. volba substituce

2. ověření předpokladů věty (hlavně regularita)

3. výpočet J_φ

4. určení $\phi{-}1(M)$

5. výpočet integrálu
$$\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t$$

Hinty

Substituce

1. polární

2. zobecněné polární, $x = ar\cos\alpha$, $y = br\sin\alpha$

3. $u = xy$, $v = y/x$

Příklady

Spočtěte

1. $$\int_M x \mathrm{d}A$$
   kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $$\int_M (x^2 + y^2) \mathrm{d}A$$
   kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$

3. $$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}A$$
   kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < x\}$

4. $$\int_M \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}A$$
   kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$

5. $$\int_M \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \mathrm{d}A$$
   kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x, x \leq x^2 + y^2 \leq 3x\} \setminus (0, 0)$

6. $$\int_M \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \mathrm{d}A$$
   kde M je ohraničena křivkami $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$, $y = x$, $y = 2x$.

7. $$\int_M x^2 y^2 \mathrm{d}A$$
   kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq xy \leq 3, x \leq y \leq 2x\}$

8. $$\int_M x - 2y \mathrm{d}A$$
   kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1; 0 \leq x \leq \sqrt{12}y\}$