Substituce

Věta 1 (o substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

Polární souřadnice

$$\begin{aligned} x(r,\alpha) &:= r\,\cos\alpha, \\ y(r,\alpha) &:= r\,\sin\alpha \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &> 0, \\ -\pi < \alpha &< \pi, \end{aligned}$$

$J\varphi(r,\alpha) = r$.

Zobecněné polární souřadnice

$$\begin{aligned} x(r,\alpha) &:= x_0 + ar\,\cos\alpha, \\ y(r,\alpha) &:= y_0 + br\,\sin\alpha \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &> 0, \\ -\pi < \alpha &< \pi, \end{aligned}$$

$J\varphi(r,\alpha) = abr$.

Sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x(r,\beta,\gamma) &:= r\,\cos\gamma\,\cos\beta, \\ y(r,\beta,\gamma) &:= r\,\cos\gamma\,\sin\beta, \\ z(r,\beta,\gamma) &:= r\,\sin\gamma \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &> 0, \\ -\pi < \beta &< \pi, \\ -\frac{\pi}{2} < \gamma &< \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$J_\varphi = r^2\cos\gamma$

Zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x(r,\beta,\gamma) &:= x_0 + ar\,\cos\gamma\,\cos\beta, \\ y(r,\beta,\gamma) &:= y_0 + br\,\cos\gamma\,\sin\beta, \\ z(r,\beta,\gamma) &:= z_0 + cr\,\sin\gamma \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &> 0, \\ -\pi < \beta &< \pi, \\ -\frac{\pi}{2} < \gamma &< \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$J_\varphi = abcr^2\cos\gamma$

Cylindrické souřadnice

$$\begin{aligned} x(r,\beta,\gamma) &:= r\ \cos\alpha & r &> 0,\\ y(r,\beta,\gamma) &:= r\ \sin\alpha, & -\pi &< \alpha < \pi,\\ z(r,\beta,\gamma) &:= z & z &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$J_\varphi = r$

Zobecněné cylindrické souřadnice

$$\begin{aligned} x(r,\beta,\gamma) &:= ar\ \cos\alpha & r &> 0,\\ y(r,\beta,\gamma) &:= br\ \sin\alpha, & -\pi &< \alpha < \pi,\\ z(r,\beta,\gamma) &:= z & z &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$J_\varphi = abr$

Další možné substituce

$$x = r\cos^2\alpha, \qquad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$$
$$y = r\sin^2\alpha \qquad r \in (0,\infty)$$

$$u = xy$$
$$v = y/x$$