14. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Příklady

Vzorová písemka

1. Rozviňte v řadu integrál
$$\int_0^\infty \cos x \ln(1+e^{-x})\,\mathrm{d}x.$$
2. Spočtěte integrál
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$
3. Spočtěte míru mny
$$M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z\sqrt{xy} < 2, \sqrt{x^2+y^2} < z+1, z > 0\right\}$$
4. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^{-n} \sin\frac{x}{n}\,\mathrm{d}x.$$
5. Spočtěte integrál
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e{-}a^2x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
6. Spočtěte integrál
$$\int_M \frac{x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2},$$
kde
$$M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : 0 < xz < x^2+y^2 < 1, z > 0\right\}.$$

Míra množin

1. Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného asteroidou $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.
2. Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $x^3+y^3 = 3axy$, $a > 0$.
3. Určete objem tělesa ohraničeného plochami $z = x^2+y^2+4$, $x-y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
4. Určete objem tělesa ohraničeného plochami $z = 2(x^2+y^2)$, $z^2 = 16(x^2+y^2)$.
5. Určete objem tělesa ohraničeného plochami $(z-2)^2 = x^2/3+y^2/2$, $z = 0$.
6. Určete objem tělesa ohraničeného plochami $x^2+y^2 = x+y$, $z = x+y$, $z = 0$.

Derivace

Hint:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$$

1.
$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Spočítejte $F(\alpha)$ pomocí derivace. Určete konvergenci: pro jaká α funkce konverguje.

2.
$$F(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Spočítejte $F(\alpha,\beta)$ pomocí derivace i Fubiniho věty. Určete konvergenci: pro jaká α a β funkce konverguje.

3.
$$F(\alpha,\beta) = \int_0^\infty e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2}\,\mathrm{d}x$$

Spočítejte $F(\alpha,\beta)$ pomocí derivace i Fubiniho věty. Určete konvergenci: pro jaká α a β funkce konverguje.