

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t dt$, $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Na závěr uvedeme příklady na užití sférických (kulových) souřadnic pro výpočet trojného integrálu.

$$\Phi: \begin{cases} x = r \cos t \sin s \\ y = r \sin t \sin s \\ z = r \cos s \end{cases} \quad 0 \leq r, 0 \leq t < 2\pi, 0 \leq s \leq \pi.$$

Protože

$$\det D\Phi = \det \begin{pmatrix} \cos t \sin s & \sin t \sin s & \cos s \\ -r \sin t \sin s & r \cos t \sin s & 0 \\ r \cos t \sin s & r \sin t \cos t & -r \sin s \end{pmatrix} = r^2 \sin s,$$

dostaneme

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r \cos t \sin s, r \sin t \sin s, r \cos s) \cdot r^2 \sin s dr dt ds.$$

Poznamenejme, že v některých učebnicích se užívá odlišný tvar sférických souřadnic

$$\Phi: \begin{cases} x = r \cos t \cos s \\ y = r \sin t \cos s \\ z = r \sin s \end{cases} \quad 0 \leq r, 0 \leq t < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2},$$

pak ovšem vychází $\det D\Phi = r^2 \cos s$.

Příklad 8.17:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz, \text{ kde } \Omega = \{(x, y, z); 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \}.$$

řešení:

Převědeme do sférických souřadnic. První podmínka vymežující množinu Ω nám dává $1 \leq r \leq 3$, z dalších tří podmínek dostáváme $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ a $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$, neboli $\Phi^{-1}(\Omega) = (1, 3) \times (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$. Dosadíme a vypočteme

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz &= \iiint_{(1,3) \times (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})} \frac{r \cos s}{\sqrt{r^2 \cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s}} \cdot r^2 \sin s dr dt ds = \\ &= \int_1^3 r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s ds = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 \cdot |t|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot |\sin s|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{3} \pi. \end{aligned}$$

Příklad 8.18:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)z dx dy dz, \text{ kde } \Omega = \{(x, y, z); 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0, \}.$$

řešení:

Převědeme do sférických souřadnic. První podmínka vymežující množinu Ω nám dává $1 \leq r \leq 2$. Z druhé podmínky dostaneme $r^2 \sin^2 s \leq r^2 \cos^2 s$, neboli $\tan s \leq 1$, což spolu s lětí podmínkou dává $0 \leq s \leq \frac{\pi}{4}$. Na proměnnou t není kladen žádný požadavek, a tedy $\Phi^{-1}(\Omega) = (1, 2) \times (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{4})$. Dosadíme a vypočteme

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)z dx dy dz &= \iiint_{(1,2) \times (0,2\pi) \times (0, \frac{\pi}{4})} (r^2 \cos^2 t \sin^2 s + r^2 \sin^2 t \sin^2 s) \cdot r \cos s \cdot r^2 \sin s dr dt ds = \\ &= \iiint_{(1,2) \times (0,2\pi) \times (0, \frac{\pi}{4})} r^5 \sin^3 s \cos s dr dt ds = \underbrace{\int_1^2 r^5 dr}_{=\frac{21}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 dt}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 s \cos s ds}_{=\frac{1}{4}} = \frac{21}{4} \pi. \end{aligned}$$

2

Uvedeme výpočet třetího integrálu (ostatní jsou zřejmé)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 s \cos s \, ds = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} w^3 \, dw = \left[\frac{w^4}{4} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}.$$

užili jsme substituci $w := \sin s$, a tedy $dw = \cos s \, ds$, $0 = 0$ a $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Příklad 8.19:

Zjistěte souřadnice těžiště rovinného útvaru na obrázku (je-li hmota rozložena stejnoměrně, neboli hustota je konstantní $\rho(x, y) = 1$).

řešení:

Nejprve vyjádříme jednotlivé části hranice Ω pomocí funkčních vztahů

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 \quad (1. \text{ kvadrant}) \quad y = \frac{1}{2}x + 1 \quad (2. \text{ kvadrant})$$

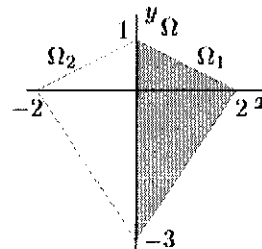
$$y = -\frac{3}{2}x - 3 \quad (3. \text{ kvadrant}) \quad y = \frac{3}{2}x - 3 \quad (4. \text{ kvadrant}).$$

Protože útvar na obrázku je symetrický podle osy y , první souřadnice těžiště je zřejmě nulová $x_T = 0$.

Pro výpočet druhé souřadnice budeme potřebovat dvojnásobné integrály

$$m = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = 2 \iint_{\Omega_1} 1 \, dx \, dy, \quad \text{a} \quad M_y = \iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} y \, dx \, dy + \iint_{\Omega_2} y \, dx \, dy,$$

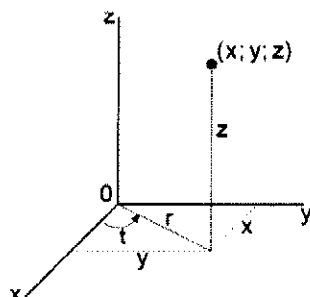
první integrál vyjadřuje hmotnost, druhý tzv. statický moment. Převedeme tedy dvojnásobný integrál na dvojnásobný pomocí Fubiniovy věty a dopočítáme



kde

$$r \geq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{a } z^* \in \mathbb{R}.$$



Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t & 0 \\ \sin t & r \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r (\cos^2 t + \sin^2 t) = r.$$

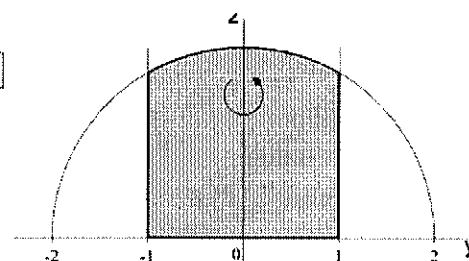
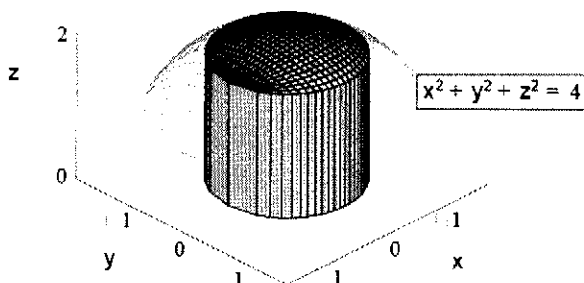
Poznámka 2.20. Substituci do cylindrických souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice půdorysu tělesa Ω , přes které integrujeme, obsahuje části kružnic. Samozřejmě, že vhodnost či nevhodnost substituce ovlivňuje také samotná integrovaná funkce.



Příklad 2.21. Vypočtete integrál $I = \iiint_{\Omega} (x^4 + y^4) z \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Řešení. Množina Ω je válec „seříznutý“ shora kulovou plochou.



Zavedeme-li válcové souřadnice

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$z = z,$$

obdržíme omezení

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2}.$$

Podle věty 2.18 tedy platí

$$I = \iiint_{M_{rtz}} (r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t) z \cdot r \, dr \, dt \, dz,$$

kde

$$M_{rtz} = \left\{ (r, t, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq t \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2} \right\}.$$

Užijeme-li nyní Fubiniovy věty (2.10 a 1.22), dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} (r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t) z \cdot r \, dz \right) dt \right) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt \cdot \int_0^1 \left(r^5 \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} z \, dz \right) \right) dr = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt. \end{aligned}$$

2.3.5 Substituce do zobecněných sférických souřadnic

Nechť $a, b, c > 0$ jsou daná čísla. Uvažujme zobrazení

$$\begin{aligned}x &= a \cdot \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= b \cdot \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= c \cdot \rho \sin \vartheta,\end{aligned}$$

kde

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Podobně jako u klasických sférických souřadnic můžeme i zde vypočítat Jacobián zobrazení

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = abc \cdot \rho^2 \cos \vartheta.$$

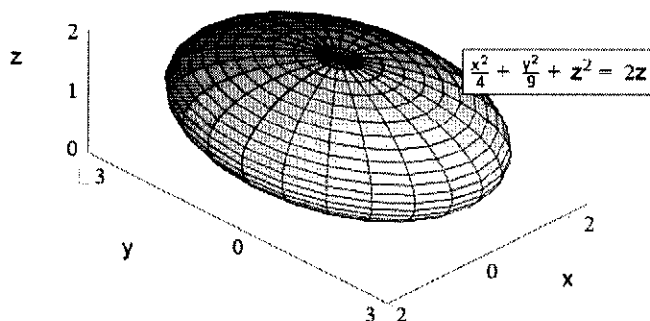
Poznámka 2.25. Substituce do zobecněných sférických souřadnic se používá, pokud těleso Ω , přes které integrujeme, má tvar elipsoidu.



Příklad 2.26. Vypočtete integrál $I = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z \right\}.$$

Řešení. Podmínku $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$ lze ekvivalentně upravit do tvaru $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z - 1)^2 \leq 1$. Odtud je vidět, že Ω je elipsoid se středem v bodě $(0, 0, 1)$ a poloosami 2, 3 a 1.



Použijeme zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned}x &= 2\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= 3\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= \rho \sin \vartheta.\end{aligned}$$

(4)

Jacobián tohoto zobrazení je zřejmě $J = 6\rho^2 \cos \vartheta$. Dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$ dostaneme $\rho^2 \leq 2\rho \sin \vartheta$. Není těžké si uvědomit, že elipsoid Ω je pak určen omezeními

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2 \sin \vartheta \rangle.$$

To tedy znamená, že

$$I = \iiint_M \rho \sin \vartheta \cdot J \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \iiint_M 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta,$$

kde

$$M = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \rho \leq 2 \sin \vartheta \right\}.$$

Odtud podle vět 2.10 a 1.22 máme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \sin \vartheta} 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta \left[\frac{6\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{2 \sin \vartheta} d\vartheta = 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin^5 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \sin \vartheta = u \\ \cos \vartheta \, d\vartheta = du \\ 0 \mapsto 0, \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{array} = \\ &= 48\pi \int_0^1 u^5 \, du = 48\pi \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 = 48\pi \cdot \frac{1}{6} = 8\pi. \end{aligned}$$

Jiná možnost, jak integrál spočítat, je použít „posunutě“ zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 2\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y &= 3\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\ z &= 1 + \rho \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je opět $J = 6\rho^2 \cos \vartheta$ a dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$, která je ekvivalentní s nerovností $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z-1)^2 \leq 1$, obdržíme $\rho^2 \leq 1$, tj. $0 \leq \rho \leq 1$. Odtud (podobně jako u prvního způsobu výpočtu) dostaneme, že

$$I = \iiint_N (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot J \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \iiint_N (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta,$$

kde

$$N = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

Podle vět 2.10 a 1.22 pak pro integrál I platí

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta) \, d\vartheta \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 3\rho^3 \sin 2\vartheta) \, d\vartheta \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left[6\rho^2 \sin \vartheta - \frac{3}{2}\rho^3 \cos 2\vartheta \right]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho = 2\pi \int_0^1 12\rho^2 \, d\rho = 24\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \\
 &= 24\pi \cdot \frac{1}{3} = 8\pi. \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

2.4 Některé aplikace trojného integrálu

2.4.1 Objem tělesa

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelná množina. Pak objem tělesa M definujeme pomocí vztahu

$$\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz.$$

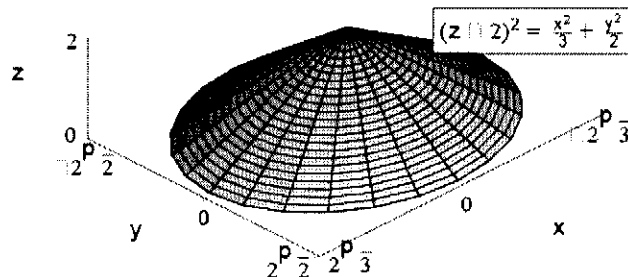
Poznámka 2.27. Uvažujme množinu T stejnou jako v kapitole 1.6.2. Pak zřejmě platí $V(T) = \lambda(T)$.



Příklad 2.28. Vypočítejte objem tělesa $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ohraničeného plochami

$$(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}; \quad z = 0.$$

Řešení. Naše těleso M je částí eliptického kužele.



Poznámka 2.29. V předchozím příkladu bychom také mohli postupovat tak, že bychom (pro vhodná a, b) zavedli tzv. zobecněné cylindrické souřadnice, tj.

$$\begin{aligned}x &= a \cdot r \cos t, \\y &= b \cdot r \sin t, \\z &= z^* (= z),\end{aligned}$$

kde

$$r \geq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$z^* \in \mathbb{R}.$$

Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t & 0 \\ b \sin t & br \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab \cdot r (\cos^2 t + \sin^2 t) = ab \cdot r.$$

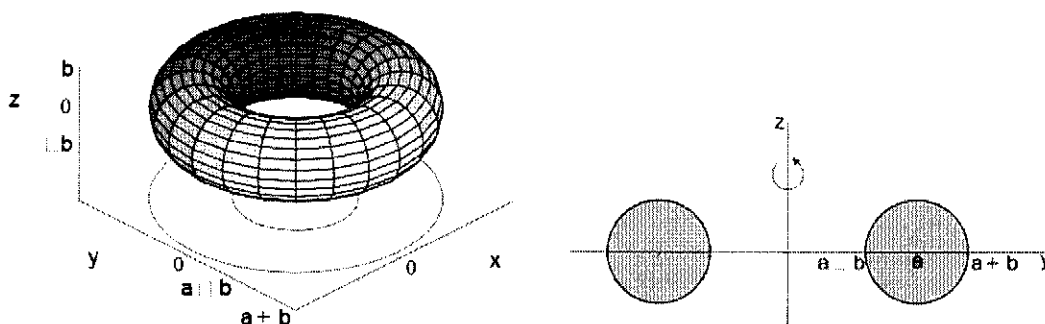
Domácí cvičení 2.30. Pokuste se vyřešit příklad 2.28 pomocí zobecněných cylindrických souřadnic (viz poznámka 2.29).



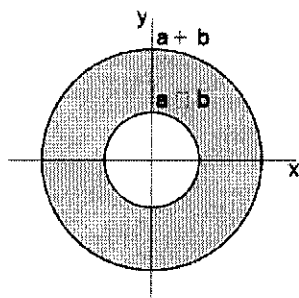
Příklad 2.31. Vypočítejte objem tělesa M ohraničeného plochou (anuloidem)

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a).$$

Řešení.



Víme, že pro objem tělesa M platí $\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz$. Řezem tělesa M rovinou $z = 0$ je mezikruží znázorněné na obrázku níže.



Pro výpočet $\lambda(M)$ bude tedy vhodné použít v příslušném integrálu transformaci do cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned}x &= r \cos t, \\y &= r \sin t, \\z &= z.\end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = r$. Těleso M v těchto nových (cylindrických) souřadnicích popíšeme podmínkami (promyslete to!)

$$t \in (0, 2\pi), \quad r \in (a-b, a+b), \quad z \in \left(-\sqrt{b^2 - (r-a)^2}, \sqrt{b^2 - (r-a)^2} \right).$$

Proto (vzhledem ke větám 1.22. 2.10 a 2.18) pro objem tělesa M platí

$$\begin{aligned}\lambda(M) &= \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{a-b}^{a+b} \left(\int_{-\sqrt{b^2 - (r-a)^2}}^{\sqrt{b^2 - (r-a)^2}} r \, dz \right) dr \right) dt = \\ & \text{substituce} \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{a-b}^{a+b} r \sqrt{b^2 - (r-a)^2} \, dr = \begin{array}{l} r-a = u \\ dr = du \\ a-b \mapsto -b \\ a+b \mapsto b \end{array} = 4\pi \int_{-b}^b (u+a) \sqrt{b^2 - u^2} \, du = \\ &= 4\pi \int_{-b}^b \underbrace{u \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{lichá v } u} \, du + 4\pi a \int_{-b}^b \underbrace{\sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{sudá v } u} \, du = 8\pi a \int_0^b \sqrt{b^2 - u^2} \, du = \\ & \text{substituce} \\ &= \begin{array}{l} u = b \sin s \\ du = b \cos s \, ds \\ 0 \mapsto 0, \quad b \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} = 8\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 s} \cdot b \cos s \, ds = 8\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s \, ds = \\ &= 8\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2s}{2} \, ds = 8\pi ab^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin 2s}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \right) = 2\pi^2 ab^2.\end{aligned}$$

5.

Viviani

$$(6) \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$$

$$x^2 + y^2 \leq 4y$$

$$x^2 + (y-2)^2 \leq 4$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

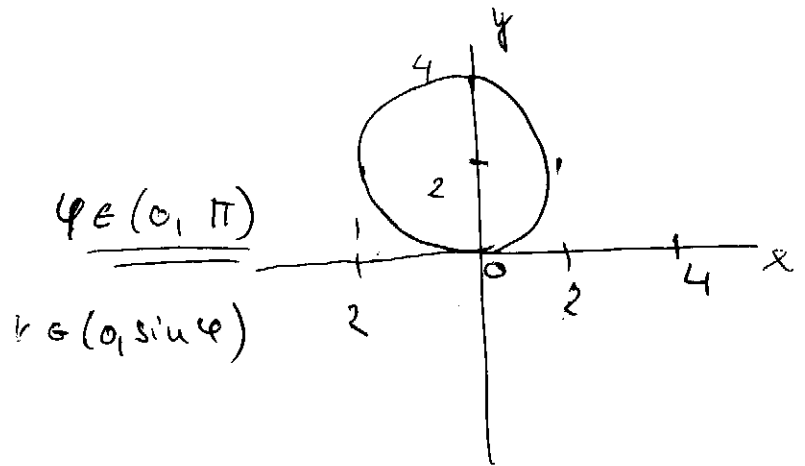
$$z = z$$

$$J_{\varphi} = r$$

$$r^2 + z^2 \leq 16$$

$$0 \leq r^2 \leq 4r \sin \varphi$$

$$0 \leq r \leq 4 \sin \varphi$$



$$z^2 \leq 16 - r^2$$

$$-\sqrt{16-r^2} \leq z \leq \sqrt{16-r^2}$$

mua je sqm. ptea ou z, tealy

$$2 \int_0^{\pi} \int_0^{4 \sin \varphi} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{4 \sin \varphi} r \sqrt{16-r^2} \, dr \, d\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (16-r^2)^{3/2} \right]_0^{4 \sin \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \left[-\frac{1}{3} (16-16 \sin^2 \varphi)^{3/2} + \frac{1}{3} (16)^{3/2} \right] d\varphi$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^{\pi} 64 (\cos^2 \varphi)^{3/2} - 64 \, d\varphi = -\frac{64 \cdot 2}{3} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi - 64 \, d\varphi$$

$$= -\frac{256}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) - 1 = -\frac{256}{3} \left[\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi - \varphi \right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{256}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

12 Trojný integrál - Transformace integrálů

111. Příklad Spočítejte $\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy dz$, kde $\Omega : 1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$.

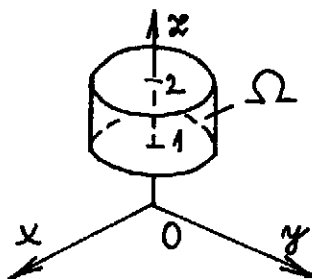
Řešení Integrační obor Ω určený vztahy $1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$ je válec. Viz Obrázek 41. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\rho \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$z \in \langle 1, 2 \rangle.$$

Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.

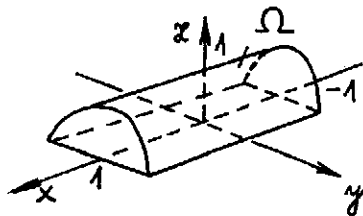


Obrázek 41: $\Omega : 1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy dz &= \iiint_{\Omega} (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \iiint_{\Omega} \rho^3 d\rho d\varphi dz = \\ &= \int_0^1 \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_1^2 dz = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

112. Příklad Spočítejte $\iiint_{\Omega} dx dy dz$, kde $\Omega : -1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$.

Řešení Vztahy $-1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou x . Viz Obrázek 42.



Obrázek 42: $\Omega : -1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$

Provedeme transformaci do „válcových souřadnic“. Transformační rovnice jsou tvaru

$$x = x,$$

$$y = \rho \cos \varphi,$$

$$z = \rho \sin \varphi.$$

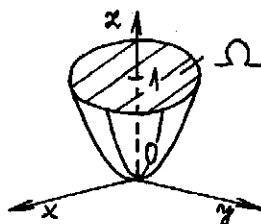
Jakobián transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \varrho dx d\varphi dz = \int_{-1}^1 dx \cdot \int_0^1 \varrho d\varrho \cdot \int_0^{\pi} d\varphi = [x]_{-1}^1 \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi.$$

113. Příklad Spočítejte $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, kde $\Omega : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.



Obrázek 43: $\Omega : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 1 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle \varrho^2, 1 \rangle. \end{aligned}$$

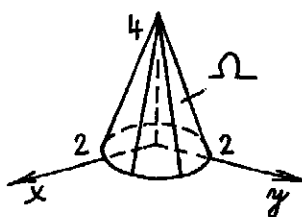
$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi} \cdot \varrho d\varrho d\varphi dz = \\ &= \iiint_{\Omega^*} \varrho^2 d\varrho d\varphi dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2 dz \right) d\varphi \right) d\varrho = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \varrho^2 [z]_{\varrho^2}^1 d\varphi \right) d\varrho = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \varrho^2 (1 - \varrho^2) d\varphi \right) d\varrho = \int_0^1 \varrho^2 (1 - \varrho^2) [\varphi]_0^{2\pi} d\varrho = 2\pi \left[\frac{1}{3} \varrho^3 - \frac{1}{5} \varrho^5 \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15} \pi. \end{aligned}$$

114. Příklad Spočítejte $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, kde $\Omega : 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Viz Obrázek 44.

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 2 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle 0, 4 - 2\varrho \rangle. \end{aligned}$$

Obrázek 44: $\Omega : 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\Omega^*} z \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{4-2\rho} z \rho \, dz \right) d\varphi \right) d\rho = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{4-2\rho} \rho \, d\varphi \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (4-2\rho)^2 \rho \, d\varphi \right) d\rho = \pi \int_0^2 (4-2\rho)^2 \rho \, d\rho = \frac{16}{3} \pi. \end{aligned}$$

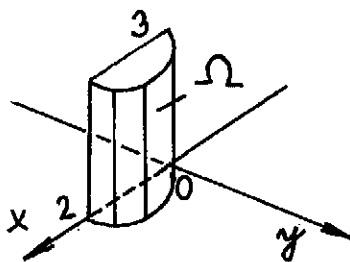
115. Příklad Spočítejte $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, kde $\Omega : z = 0, z = 3, y \geq 0, x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Řešení Vztah $x^2 + y^2 = 2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Odtud a ze vztahů $z = 0, z = 3, y \geq 0$ plyne, že Ω je polovina válce. Viz Obrázek 45. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\rho \in \langle 0, 2 \cos \varphi \rangle,$$

$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$$

$$z \in \langle 0, 3 \rangle.$$

Obrázek 45: $\Omega : z = 0, z = 3, y \geq 0, x^2 + y^2 - 2x = 0$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\Omega^*} z \rho^2 \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \left(\int_0^3 z \rho^2 \, dz \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^3 \rho^2 \, d\rho \right) d\varphi = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi = 8. \end{aligned}$$

2.3.4 Substituce do sférických souřadnic

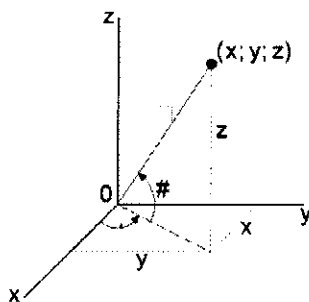
Uvažujme zobrazení

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= \rho \sin \vartheta,\end{aligned}$$

kde

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$



Nyní přímým výpočtem (rozvojem podle posledního řádku) určíme Jacobián tohoto zobrazení. Platí

$$\begin{aligned}J(\rho, \varphi, \vartheta) &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \cos \vartheta & -\rho \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \\ &= \sin \vartheta (\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) + \rho \cos \vartheta (\rho \cos^2 \vartheta) = \rho^2 \cos \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = \rho^2 \cos \vartheta.\end{aligned}$$

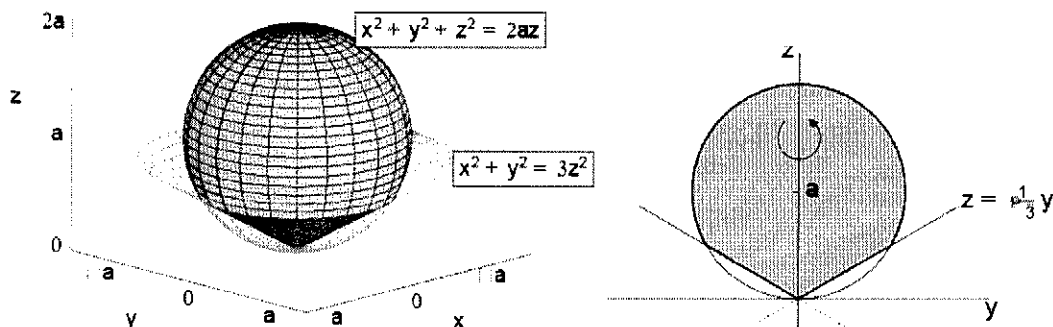
Poznámka 2.23. Pro substituci do sférických souřadnic se zpravidla rozhodneme, pokud hranice tělesa Ω , přes které integrujeme, obsahuje části kulových ploch.



Příklad 2.24. Pro $a > 0$ vypočtěte integrál $I_a = \iiint_{\Omega_a} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, kde

$$\Omega_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \wedge x^2 + y^2 \leq 3z^2\}.$$

Řešení. Podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ lze upravit do tvaru $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$. Množina Ω_a je tedy průnikem koule (se středem v bodě $(0, 0, a)$ a poloměrem a) a rotačního kužele (viz obrázek).



Zavedme sférické souřadnice

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= \rho \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Uvědomme si ještě jednou, že

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi) \quad \text{a} \quad \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dosazením transformačních vztahů do podmínek

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 \leq 3z^2$$

obdržíme

$$\rho^2 \leq 2a\rho \sin \vartheta \quad \wedge \quad \rho^2 \cos^2 \vartheta \leq 3\rho^2 \sin^2 \vartheta,$$

odkud dostaneme ($\rho \geq 0$)

$$\rho \leq 2a \sin \vartheta \quad \wedge \quad \cos^2 \vartheta \leq 3 \sin^2 \vartheta.$$

Z první nerovnosti obdržíme $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$ a z druhé následně $\cos \vartheta \leq \sqrt{3} \sin \vartheta$. Celkem tedy máme

$$\varphi \in (0, 2\pi), \quad \vartheta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \rho \in (0, 2a \sin \vartheta).$$

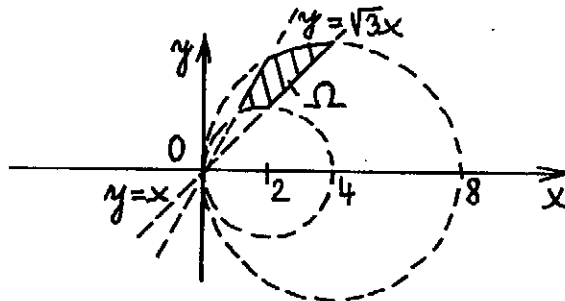
Z vět 2.18, 2.10 a 1.22 pak plyne

$$\begin{aligned}I_a &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \sin \vartheta} \rho^2 \cdot \rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{2a \sin \vartheta} d\vartheta = \\ &= \frac{2\pi}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \cdot 2^5 \cdot a^5 \cdot \sin^5 \vartheta \, d\vartheta = \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \sin \vartheta = u \\ \cos \vartheta \, d\vartheta = du \\ \frac{\pi}{6} \mapsto \frac{1}{2}; \quad \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{array} = \frac{2\pi}{5} \cdot 32a^5 \int_{\frac{1}{2}}^1 u^5 \, du = \\ &= \frac{64}{5} \pi a^5 \left[\frac{u^6}{6} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{64}{5} \pi a^5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64} \right) = \frac{21}{10} \pi a^5.\end{aligned}$$

13 Aplikace vícerozměrných integrálů

121. Příklad Spočítejte obsah rovinného obrazce M ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

Řešení Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x - 4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz Obrázek 51.



Obrázek 51: $M: y = x, y = \sqrt{3}x, x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$.

Obsah obrazce M určíme ze vztahu $S(M) = \iint_M dx dy$. Protože Ω je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

$$4 \cos \varphi \leq \rho \leq 8 \cos \varphi.$$

Platí

$$\begin{aligned} \iint_M dx dy &= \iint_{M^*} \rho \, d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} \rho \, d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [\rho^2]_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 24 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi \, d\varphi = 24 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi = 12 \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + 3\sqrt{3} - 6. \end{aligned}$$

122. Příklad Spočítejte objem tělesa Ω určeného vztahy $x^2 + y^2 \leq z^2$, $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

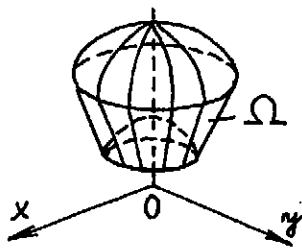
Řešení Oblast Ω je ohraničena kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz Obrázek 52. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\begin{aligned} \rho &\in (1, 2), \\ \varphi &\in (0, 2\pi), \\ \theta &\in (0, \frac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

Objem tělesa Ω určíme ze vztahu $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz$.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dx dy dz &= \iiint_{\Omega^*} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\varphi d\theta = \int_1^2 \rho^2 \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \, d\theta = \\ &= \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{7}{3} \pi (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

11.



Obrázek 52: $\Omega : x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$

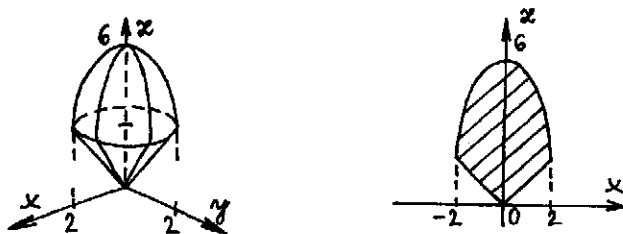
123. Příklad Spočítejte objem tělesa Ω určeného vztahem $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)$.

Řešení Oblast Ω je ohraničena zhora paraboloidem $z = 6 - (x^2 + y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Viz Obrázek 53. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protnou. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2 + y^2} = 6 - (x^2 + y^2)$. Máme $x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 6 = 0$. Zavedeme substituci $z = x^2 + y^2$. Odtud $z^2 + z - 6 = 0$ a $(z - 2)(z + 3) = 0$. Řešení $z = -3$ nevyhovuje. Platí tedy $z = 2$. Ve výšce $z = 2$ protne paraboloid kužel v kružnicím $x^2 + y^2 = 4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 2 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle \varrho, 6 - \varrho^2 \rangle. \end{aligned}$$

Objem tělesa Ω určíme opět ze vztahu $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz$.

12.



Obrázek 53: $\Omega : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dx dy dz &= \iiint_{\Omega'} \varrho d\varrho d\varphi dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\varrho}^{6-\varrho^2} \varrho dz \right) d\varphi \right) d\varrho = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} [z\varrho]_{\varrho}^{6-\varrho^2} d\varphi \right) d\varrho = \\ &= 2\pi \int_0^2 (6\varrho - \varrho^2 - \varrho^3) d\varrho = 2\pi \left[3\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{4}\varrho^4 \right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi. \end{aligned}$$

124. Příklad Spočítejte velikost povrchu části paraboloidu $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, kde $f(x, y) \geq 0$.

Řešení Velikost povrchu S paraboloidu určíme ze vztahu $S = \iint_M \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$, kde M je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = -2x, f'_y = -2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$