12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (o substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

Nechť tentokrát

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ r > 0, \ -\pi < \beta < \pi, \ -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}, \right\}.$$

Zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$\varphi(r,\beta,\gamma) := \begin{pmatrix} x(r,\beta,\gamma) \\ y(r,\beta,\gamma) \\ z(r,\beta,\gamma) \end{pmatrix},$$
$$x(r,\beta,\gamma) := r\ \cos\gamma\ \cos\beta,$$
$$y(r,\beta,\gamma) := r\ \cos\gamma\ \sin\beta,$$
$$z(r,\beta,\gamma) := r\ \sin\gamma$$

se nazývá *zobrazení sférických souřadnic.*

Věta 2 (o sférických souřadnicích)**.** *Nechť $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení sférických souřadnic. Potom φ je prosté regulární zobrazení a $J\varphi(r,\beta,\gamma) = r^2\cos\gamma$. Je-li $M \subset \mathbb{R}^3$ a u funkce na M, potom*

$$\begin{aligned} &\int_M u(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{G\cap\varphi^{-1}(M)} u(r\cos\gamma\cos\beta,\ r\cos\gamma\sin\beta,\ r\sin\gamma)\,r^2\cos\gamma\ dr\,d\beta\,d\gamma, \end{aligned}$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Cylindrické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \\ z &= z \end{aligned}$$

Jakobián

$$J = r.$$

Příklady

1.
$$\int_M \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9; x,y,z \ge 0\}$
osminka koule, sférické

2.
$$\int_M (x^2+y^2) z \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \le z^2, z \ge 0\}$
kužel, sférické

3.
$$\int_M (x^4+y^4) z \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \le 1, z \ge 0, x^2+y^2+z^2 \le 4\}$
válec v kouli, válcové

4.
$$\int_M z \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 2z\}$
elipsoid, sférické s posunutím

5. *Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochou (anuloid - torus) kde* $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 = b^2\}$*,* $0 < b < a$*.*
anuloid

6. *Spočtěte objem tělesa určeného vztahy*
$$M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le 16; x^2+y^2 \le 4y\}$$
Vivianiho okénko, cylindrické

7.
$$\int_M \sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \le z \le 1\}$
paraboloid

8.
$$\int_M x^2 + y^2 + z^2 \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 \leq 3z^2\}$

kužel, sférické

9. Spočtěte míru množiny M *kde* $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; -1 < x < 1, z > 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$

položený válec

10.
$$\int_M z \mathrm{d}A$$
kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$

kužel na podlaze

11. Spočtěte objem tělesa určeného vztahy kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

muffin, sférické

12. Spočtěte objem tělesa určeného vztahy $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)\}$

kornout se zmrzlinou