11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1 (Diferencovatelné zobrazení)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : G \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení diferencovatelné v bodě $x \in G$. Matice lineárního zobrazení $\varphi'(t)$ se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení φ v bodě t. Je to tedy matice

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t)\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}.$$

Zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ nazveme *regulární*, jestliže má spojitou derivaci (tj. spojité všechny parciální derivace) a jeho Jacobiho matice má všude v G hodnost n.

Definice 2 (Jakobián)**.** V této kapitole se budeme zabývat možností záměny proměnných v integrálu prostřednictvím zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$. Budeme tedy vyšetřovat jen případ $m = n$. Pak je Jacobiho matice čtvercová a její determinant nazveme *jakobiánem* zobrazení φ v bodě t.

Věta 3 (o substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

Příklady 4 (Polární souřadnice)**.** Nechť

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ r > 0, \ -\pi < \alpha < \pi \right\}.$$

Zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$\varphi(r,\alpha) := \begin{pmatrix} x(r,\alpha) \\ y(r,\alpha) \end{pmatrix},$$
$$x(r,\alpha) := r\,\cos\alpha,$$
$$y(r,\alpha) := r\,\sin\alpha$$

se nazývá *zobrazení polárních souřadnic.*

Věta 5 (o polárních souřadnicích)**.** *Nechť $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení polárních souřadnic. Potom φ je prosté regulární zobrazení a $J\varphi(r,\alpha) = r$. Je-li $M \subset \mathbb{R}^2$ a a u funkce na M, potom*

$$\int_M u(x,y)\,dx\,dy = \int_{G \cap \varphi^{-1}(M)} u(r\,\cos\alpha,\, r\,\sin\alpha)\, r\,dr\,d\alpha,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Postup výpočtů:

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. volba substituce
2. ověření předpokladů věty (hlavně regularita)
3. výpočet J_φ
4. určení $\phi{-}1(M)$
5. výpočet integrálu

$$\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t$$

Příklady

1.
$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}A$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < x\}$

2.
$$\int_M (x^2+y^2)\mathrm{d}A$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1\}$

3.
$$\int_M x\mathrm{d}A$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x,y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

4.
$$\int_M x^2y^2\mathrm{d}A$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq xy \leq 3, x \leq y \leq 2x\}$

5.
$$\int_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}A$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x, x \leq x^2+y^2 \leq 3x\} \setminus (0,0)$

6. Spočti míru množiny $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, (x+y)^4 < ax^2y, x > 0\}$, $a > 0$

7.
$$\int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \le y \le \sqrt{3}x\}$

8. Vypočítejte obsah plochy ohraničené lemniskátou
$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$$

9.
$$\int_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}A$$
kde M je ohraničena křivkami $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$, $y=x$, $y=2x$.

10.
$$\int_M \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}A$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le 1, y \ge 0\}$

11. míru M, kde M je ohraničena křivkami $xy=a$, $xy=b$, $y^2=mx$, $y^2=nx$, $0<a<b$ a $0<m<n$.

12.
$$\int_M \frac{y^3}{x^3}\mathrm{d}A$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \le xy \le 3, x \le y \le 2x\}$

13.
$$\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}A$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \le x^2+y^2, y \ge 0\}$

14.
$$\int_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$

Substituce

1. polární
2. $x = r\cos^2\alpha$, $y = r\sin^2\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $r \in (0,\infty)$
3. zobecněné polární, $x = ar\cos\alpha$, $y = br\sin\alpha$
4. $u = xy$, $v = y/x$
5.

Inverzni jakobian