# PŘÍKLADY K MATEMATICE 3 - VÍCENÁSOBNÉ INTEGRÁLY

ZDENĚK ŠIBRAVA

## 1. Vícenásobné intergrály

### 1.1. Dvojné integrály.

**Příklad 1.1.** *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{x^2}{3+y^2}\,\mathrm{d}A,$$

B

*kde* $M = \langle 0, 3\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

***Řešení:*** Funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{3+y^2}$ je na obdélníku (dvojrozměrném intervalu) $M$ spojitá. Užitím Fubiniovy věty převedeme dvojný integrál na dvojnásobný integrál (přičemž nezáleží na pořadí, ve kterém budeme integrovat) a postupnou integrací dostaneme

$$\begin{aligned}\int\limits_M \frac{x^2}{3+y^2}\,\mathrm{d}A &= \int\limits_0^3\int\limits_0^1 \frac{x^2}{3+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \left[\frac{x^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}}\right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{18}\int\limits_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,.\end{aligned}$$

**Příklad 1.2.** *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M x\sin y\,\mathrm{d}A,$$

A

*kde* $M = \langle 1, 2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$.

***Řešení:*** Funkce $f(x,y) = x\sin y$ je na $M$ spojitá. Pomocí Fubiniovy věty opět převedeme dvojný integrál na dvojnásobný. Protože meze pro $x$ i $y$ jsou konstantní, opět nezáleží v jakém pořadí budeme integrovat. Postupně dostaneme

*Date*:

A

$$\int_M x\sin y \,\mathrm{d}A = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}x^2\sin y\right]_{x=1}^{x=2}\mathrm{d}y = $$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin y\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\,.$$

**Příklad 1.3.** *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M x^2 y\,\mathrm{d}A,$$

*kde* $M = \langle 0,2\rangle \times \langle 1,2\rangle$. ***Výsledek:*** $4$

**Příklad 1.4.** *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M \mathrm{e}^x\, y\,\mathrm{d}A,$$

*kde* $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,4\rangle$. ***Výsledek:*** $8(\mathrm{e}-1)$

**Příklad 1.5.** *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M \frac{1}{(1+x+2y)^3}\,\mathrm{d}A,$$

*kde* $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,4\rangle$. ***Výsledek:*** $\frac{11}{90}$

**Příklad 1.6.** *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M x^2 y\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}A,$$

*kde* $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$. ***Výsledek:*** $2$

**Příklad 1.7.** *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M xy^2\sin(x^2+y)\,\mathrm{d}A,$$

*kde* $M = \langle 0,\sqrt{\pi}\rangle \times \langle 0,\pi/2\rangle$. ***Výsledek:*** $\frac{1}{4}\pi^2 - 2$

**Příklad 1.8.** *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M xy\,\mathrm{d}A,$$

*kde* $M$ *je množina ohraničená křivkami* $y = -x$ *a* $y = x - x^2$.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \qquad (1)$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx}}{x}\right]_b^a dx = \int_0^\infty \int_b^a \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-yx}}{x}\right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_b^a -e^{-yx}\,dy\,dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_b^a \int_0^\infty -e^{-yx}\,dx\,dy$$

$$= \int_b^a \left[\frac{e^{-yx}}{y}\right]_0^\infty dy = \int_b^a -\frac{1}{y}\,dy = +\ln b - \ln a$$

$$= \ln \frac{b}{a}$$

$b, a > 0$, $b - a = 0$ $\int = 0$, finit div.

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)-\ln(1+b^2x^2)}{x^2}\,dx \qquad 2$$

$$= \int_0^\infty \left[ \frac{\ln(1+y^2x^2)}{x^2} \right]_b^a dx = \int_0^\infty\int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2}\cdot 2y\;dy\,dx$$

$$= \int_b^a \int_0^\infty \frac{2y}{1+y^2x^2}\,dx\,dy = \int_b^a \left[ \frac{2\cdot\arctan yx}{\cancel{y}} \right]_0^\infty dy$$

$$= \int_b^a \pi\cdot 1\,dy = \pi\,[y]_b^a = \underline{\underline{\pi(a-b)}}$$

3

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x e^{x^2}}\, dx = \int_0^\infty \frac{e^{-0x^2} - e^{-ax^2}}{x e^{x^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-yx^2}}{x e^{x^2}} \right]_a^0 dx = \int_0^\infty \int_a^0 -x\, \frac{e^{-yx^2}}{e^{x^2}}\, dy\, dx$$

$$= \int_a^0 \int_0^\infty -x\, e^{x^2(-1-y)}\, dx\, dy =$$

$$= \int_a^0 \left[ \frac{e^{x^2(-1-y)}}{+2(1+y)} \right]_0^\infty dy = \int_a^0 \frac{-1}{2(1+y)}\, dy$$

$$= -\left[ \frac{1}{2} \ln(1+y) \right]_a^0 = \underline{+\frac{1}{2} \ln(1+a)}$$

$$\frac{e^{-ax^2}}{x e^{x^2}} \sim e^{(-a-1)x^2} = e^{-(a+1)x^2}$$

u/ spočítejte příklady v 5,42 pomocí substituce (pokud je to výhodné).

**5,70.** Dokažte následující tvrzení:

a/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx\, dy\, dz = \frac{4}{5} \pi abc \, ,$$

b/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \quad x^2 + y^2 \leq 2az, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M ( x + y + z )^2 \, dx\, dy\, dz = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \, dx\, dy\, dz =$$
$$= \frac{\pi a^5}{5} (18 \sqrt{3} - \frac{97}{6}) \, ,$$

c/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \quad y^2 + z^2 \leq x^2 \, , \quad x \geq 0 \, , \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$

$$\iiint_M ( x^2 + y^2 + z^2) \, dx\, dy\, dz = \frac{\pi R^5}{5} \, (2 - \sqrt{2} ) \, ,$$

d/ $M$ je omezena $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2 y$ , $z = 0 \Rightarrow \iiint_M \frac{xyz}{x^2+y^2} \, dx\, dy\, dz =$
$= \frac{a^4}{144}$ ,

$\overset{*}{e}$/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \quad x \geq 0 \, , \; y \geq 1 \, , \; z \geq 1 \, , \; xyz \leq 1 \right\} \Rightarrow$

$$\iiint_M e^{xyz} \cdot x^2 y \, dx\, dy\, dz = \frac{e}{2} - 1$$

Zaveďte substituci $x = u$ , $y = \frac{u+v}{u}$ , $z = \frac{u+v+w}{u+v}$ ,

f/ $M$ je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , $x^2 + y^2 = 3z \Rightarrow \iiint_M z \, dx\, dy\, dz =$
$= \frac{13}{4} \pi$ .

Fubiniovy věty lze též užít k výpočtu některých integrálů. Metodě, podle které budeme v následujících příkladech postupovat, se někdy říká "integrace podle parametru".

**5,71.** Spočtěte integrál $I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} \, dx$ . (4)
(viz též př. 6,44 . )

Lehko zjistíte viz obdobný příklad 3,42 - že pro $a \leq 0$, $b > 0$ anebo pro $a > 0$ , $b \leq 0$ integrál $I(a,b)$ diverguje. Buď tedy $a > 0$ , $b > 0$ , nechť např. je $b < a$ .
Uvažujme následující integrál $I$ ,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2} \, dx\, dy \, , \text{ kde } M = \left\{ [x,y] \in E_2 \; ; \quad x \in (0,+\infty) \quad y \in (b,a) \right\}$$

Funkce $\frac{1}{1+x^2y^2}$ je spojitá a kladná na množině M , tedy $\frac{1}{1+x^2y^2} \in \mathcal{L}^{*}_{M}$

a můžeme použít Fubiniovu větu.

Dostáváme

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dxdy = \int_0^{\infty} \left( \int_b^a \frac{dy}{1+x^2y^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[ \frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} dx = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx =$$

$$= I(a,b) \;,$$

na druhé straně, provedeme-li integraci v obráceném pořadí,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy = \int_b^a \left( \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx \right) dy = \int_b^a \left[ \frac{\operatorname{arctg} xy}{y} \right]_{x=0}^{x=+\infty} dy =$$

$$= \int_b^a \frac{\pi}{2y}\,dy = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} \;.$$

Odtud vyplývá, že

$$I\,(a,b) = I = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} \;.$$

V praxi ovšem funkci $\frac{1}{1+x^2y^2}$ a množinu M musíme nalézt, obyčejně postupujeme takto:

$$\frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} = \left[ \frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right) dy =$$

$$= \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2}\,dy \;.$$

Z uvedeného příkladu bylo vidět, v čem spočívá metoda integrace podle parametru. Oklikou přes dvojný integrál se nám podařilo spočítat integrál, s kterým bychom si jinak těžko věděli rady. Jiné způsoby výpočtu těchto integrálů, pomocí metody derivace podle parametru, jsou uvedeny v následující 6. kapitole.

5,72. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log \frac{b+1}{a+1}$ pro $a \in (-1,+\infty)$, $b \in (-1,+\infty)$ . 5

1/ Zjistěte jako cvičení, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > -1$ , $b > -1$ .

2/ Buď $-1 < a < b$ . Potom

$$\frac{x^b-x^a}{\log x} = \left[ \frac{x^y}{\log x} \right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^y}{\log x} \right) dy = \int_a^b x^y \, dy .$$

Ukažte, že na integrál

$$\iint_M x^y \, dx \, dy \, , \quad M = \left\{ [x,y] \in E_2 \, ; \quad x \in (0,1) \quad y \in (a,b) \right\}$$

můžete použít Fubiniovu větu, dostanete

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x} \, dx = \iint_M x^y dx \, dy = \int_a^b \left( \int_0^1 x^y \, dx \right) dy = \log \frac{b+1}{a+1} \, . \, \|$$

**5,73.** Poznámka:

Speciální volbou hodnot a,b dostáváme z minulého příkladu např.

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x} \, dx = \log 2 \quad (b = 1 \, , \quad a = 0 ) \, ,$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\log x} \, dx = \log \frac{3}{2} \quad (b = \frac{1}{2} \, , \quad a = 0), \text{ atd.},$$

kteréžto integrály bychom asi jinak těžko počítali.

**5,74.** Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x} = \pi \arcsin \frac{b}{a} \quad \text{pro } 0 < b \leqq a \, .$$

A/ Použijte vztahů

1/ $$\log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2 \sin^2 x}$$

pro $0 < b \leq a$ ,

2/ $$\frac{1}{a^2-b^2y^2\sin^2 x} \in \mathscr{L}_M^R \quad \text{pro } M = \left\{ [x,y] \in E_2 \, ; \right.$$

$$\left. x \in (0, \frac{\pi}{2} ), \quad y \in (0,1) \right\} ,$$

3/ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{A^2 - B^2\sin^2 z} = \frac{\pi}{2A} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2-B^2}} \quad \text{pro } |A| > |B| \, .$$

B/ Použijte též vztahu

(6)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{x}\right]_{b=y}^{a=y} = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-yx^2}}{x}\right)dy\right)dx$$

$$= \int_0^\infty \int_b^a -xe^{-yx^2}\,dy\,dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_b^a \int_0^\infty -xe^{-yx^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_b^a \left[\frac{1}{2y}e^{-yx^2}\right]_0^\infty dy = \int_b^a -\frac{1}{2y}\,dy = -\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}$$

# Fubiniho věta

**Věta** Fubini

$M \subset \mathbb{R}^2$ měřitelná, $f(x,y)$ měřitelná na $M$

Jestliže $\int_M f$ má smysl (speciálně je-li $f$ nezáporná nebo integrovatelná), potom

$$\int_M f(x,y)\,\underbrace{dx\,dy}_{d\lambda^2} = \int_{\underset{\text{projekce}}{P(M)}} \Big(\int_{\underset{\text{řez}}{M_x}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx$$

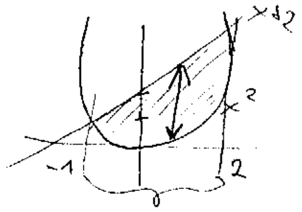
kde $M_x = \{y : [x,y] \in M\}$

$P(M) = \{x,\ M_x$ je měřitelná a $\lambda^1(M_x) = 0\}$

$P(M)$

Pozn. lze prohodit $x$ a $y$

Př. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x+2\}$



$P(M)$

míra mny: $\int 1\,dM$

$x^2 = x+2$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$

$$\iint_M 1\,d\lambda^2 = \int_{-1}^{2}\Big(\int_{x^2}^{x+2} 1\,dy\Big)\,dx = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \frac{9}{2}$$

Př. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x} = \int_0^\infty \Big[\frac{e^{-yx^2}}{x}\Big]_{b=y}^{a=y} = \int_0^\infty\Big(\int_b^a \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{e^{-yx^2}}{x}\Big)dy\Big)\,dx =$$

// $\int_b^a F' = F(a)-F(b)$ // $$= \int_0^\infty\Big(\int_b^a -x e^{-yx^2}\,dy\Big)\,dx \overset{FUB}{=}$$

$$= \iint d\lambda^2 \overset{FUB}{=} \int_b^a\Big(\int_0^\infty -x e^{-yx^2}\,dx\Big)\,dy = \int_b^a \Big[\frac{1}{2y}e^{-yx^2}\Big]_0^\infty\,dy =$$

$$= \int_b^a -\frac{1}{2y}\,dy = -\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}$$

Pro kladné ty f(x,y) : $(0,\infty)\times(b,a)$ – měřitelné

$$\iint -x\, e^{-yx^2} = -\iint x\, e^{-yx^2}$$

$\Downarrow$

kladné.

$\Longrightarrow$ FUB platí i pro nezáporné fce

Př.

(1) $M = \{[x,y] : x \geq 0,\ y \geq 0\ \ x+y \leq 1\}$

(2) $M = \{1 \leq x \leq 5,\ y \leq 3,\ x\cdot y \geq 1\}$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}$ Hint: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\nabla$ [illegible] !

$a,b>0\ldots$

(4) $\left\{ \frac{x^2}{2} \leq y \leq \frac{8}{4+x^2} \right\}$

(5) $\displaystyle\int_M (x^2+y^2)\,d\lambda^2$ $M = \{|x|+|y| \leq 1\}$

(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}$

(7) $M = \{x > 2,\ 0 < y < \frac{1}{x^2}\}$

(8) $\displaystyle\iint_M e^{-x+y}\,d\lambda^2$ $M = \{0 \leq x \leq y\}$

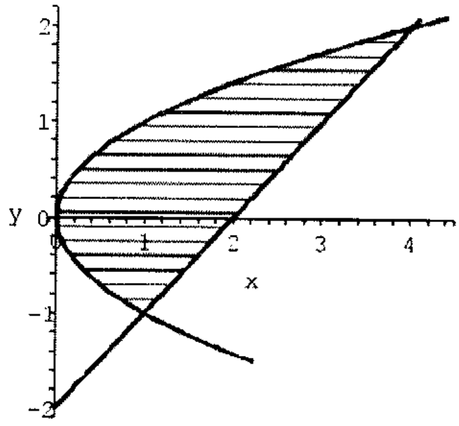
$0 \le x \le 1, \quad |y| \le x, \quad 0 \le z \le xy^2$

$$\int_{0}^{1}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{xy^2} 1 \, dz\, dy\, dx = \int_{0}^{1}\int_{-x}^{x} \left[z\right]_0^{xy^2} dy\, dx =$$

$x \quad y \quad z$

$$= \int_{0}^{1}\int_{-x}^{x} xy^2 \, dy\, dx = \int_{0}^{1} \left[x \frac{y^3}{3}\right]_{-x}^{x} dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{3} \, dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3 \cdot 5}}}$$




Obr. 3

$$\int_M x^2 y \,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{3}x^3 y\right]_{x=y^2}^{x=y+2}\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-1}^{2}\frac{1}{3}y\left((y+2)^3 - y^6\right)\mathrm{d}y = \frac{603}{40}.$$

**Příklad 1.11.** *Vypočítejme dvojný integrál*

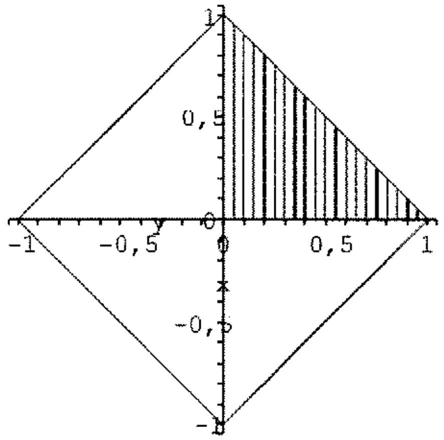
$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

*kde $M$ je množina ohraničená křivkou $|x| + |y| = 1$.*

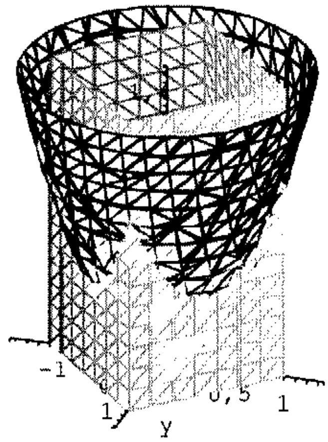
***Řešení:*** Hraniční křivkou množiny $M$ je lomená čára, s vrcholy v bodech $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ a $(0,-1)$, (Obr. 4). Funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ je na množině $M$ spojitá a nezáporná. Z definice dvojného integrálu $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}A$ víme, že jeho geometrickým významem (za předpokladu, že funkce $f$ je na $M$ spojitá a nezáporná) je objem válcového tělesa (Obr. 5)

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3 : (x,y) \in M \wedge 0 \le z \le f(x,y)\right\}.$$

Těleso, jehož objem máme počítat (část hranolu jehož osa je rovnoběžná s osou $z$), je symetrické podle rovin $x = 0$ a $y = 0$. Stačí tedy počítat pouze přes část množiny $M$ ležící v 1. kvadrantu. Výsledný integrál bude čtyřnásobkem takto




Obr. 4




Obr. 5

vypočítaného integrálu. Je tedy

$$\begin{aligned}\int\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A &= 4\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^1 \left[yx^2+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x = \\ &= 4\int\limits_0^1\left(x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

**Příklad 1.12.** *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M (2x+y)\,\mathrm{d}A,$$

*kde* $M=\{(x,y)\in\mathrm{R}^2 : x\geq 0 \wedge y\geq 0 \wedge x+y\leq 3\}$. ***Výsledek:*** 27/2

**Příklad 1.13.** *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}A,$$

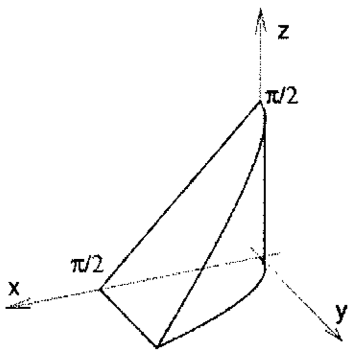
*kde* $M=\{(x,y)\in\mathrm{R}^2 : 0\leq y\leq 1 \wedge y\leq x\leq 10y\}$. ***Výsledek:*** 6

**Příklad 1.14.** *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A,$$

*kde* $M$ *je uzavřená množina ohraničená křivkami* $y^2=2x$ *a* $y=2x$.
***Výsledek:*** $\ln(5/4)$

*c)* $\iiint\limits_M y\cos(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde $M$ je ohraničena plochami* $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.




Množina $M$ je shora ohraničena rovinou $x+z=\frac{\pi}{2}$, dále souřadnými rovinami a parabolickou válcovou plochou $y=\sqrt{x}$. Průmět do souřadné roviny $xy$ je shora ohraničen grafem funkce $y=\sqrt{x}$, dále osou $x$ a přímkou $x=\frac{\pi}{2}$. Proto platí

$$\iiint\limits_M y\cos(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cos(z+x)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}[y\sin(z+x)]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\sin x)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\cos x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$

## Cvičení

V následujících příkladech vypočítejte zadané integrály

**Příklad 8** $\iint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde $B$ je množina ohraničená přímkami* $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y+1=0$. [3]

**Příklad 9** $\iint\limits_B(2x+3y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde $B$ je množina ohraničená parabolou $y^2=2x$ a její tětivou jdoucí body* $A=(2,-2)$, $B=(8,4)$. [$187\frac{1}{5}$]

**Příklad 10** $\iint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2, y\leq 4-x^2\}$ [$\frac{16}{3}\sqrt{2}$]

**Příklad 11** $\iint\limits_B xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde $B$ je množina ohraničená parabolou $y^2=2px$ a přímkou* $x=\frac{p}{2}$. [$\frac{p^5}{21}$]

**Příklad 12** $\iiint\limits_B xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde $B$ je množina ohraničená plochami* $z=xy$, $x+y=1$ *a* $z=0$. [$\frac{1}{180}$]

**Příklad 13** $\iiint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde $B$ je množina ohraničená plochami* $z=xy$, $y=\sqrt{x}$ *a rovinami* $x+y=2$, $y=0$, $z=0$. [$\frac{3}{8}$]

**Příklad 14** $\iiint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde $B$ je množina ohraničená plochami* $z=1-4x^2-y^2$ *a* $z=0$. [$\frac{\pi}{4}$]

**Příklad 15** $\iiint\limits_B xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *kde $B$ je množina ohraničená plochami* $x=1$, $y=x$, $z=y$ *a souřadnými rovinami.* [$\frac{1}{48}$]

**Příklad 1.91.** *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W x^2 z\, \mathrm{e}^{x-y+z^2}\, \mathrm{d}V,$$

*kde* $W = \langle -1, 1\rangle \times \langle -2, 0\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. ***Výsledek:*** $(\mathrm{e}^2-5)(\mathrm{e}^2-1)(\mathrm{e}-1)/(2\,\mathrm{e})$

**Příklad 1.92.** *Vypočítejme trojný integrál*

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, \mathrm{d}V,$$

*kde* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$.

***Řešení:*** Množina $W$ je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Jeho průmětem do roviny $xy$ je trojúhelník $M$ (Obr. 16) s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Zřejmě $\forall (x, y) \in M$ je $0 \leq z \leq 1 - x - y$. Pomocí Fubiniovy věty můžeme tedy daný trojný integrál převést na dvojný z jednoduchého

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, \mathrm{d}V = \int_M \left( \int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y}\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}A.$$

Zapíšeme-li množinu $M$ ve tvaru

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

můžeme použitím Fubiniovy věty pro dvojný integrál náš trojný integrál převést na trojnásobný integrál. Potom

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[ \frac{z}{1+x+y} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1-x-y}{1+x+y}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 [2\ln(1+x+y) - y]_{y=0}^{y=1-x}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (2\ln 2 - 2\ln(x+1) + x - 1)\, \mathrm{d}x =$$

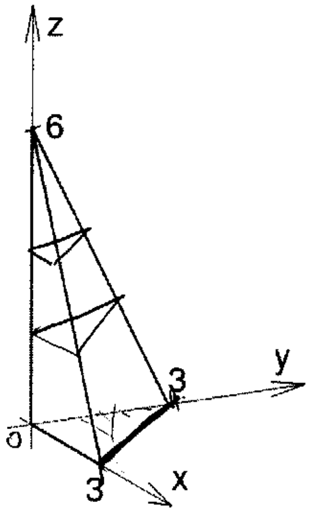
$$= \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

Při výpočtu trojného integrálu můžeme postupovat také např. takto:

Pro libovolné $z \in \langle 0, 1\rangle$ leží vždy bod $(x, y)$ v trojúhelníku, jehož kolmý průmět do roviny $xy$ $(z = 0)$ je trojúhelník $M_z$ s vrcholy $(0, 0)$, $(1-z, 0)$, $(0, 1-z)$ (Obr. 17). Podle Fubiniovy věty můžeme tedy trojný integrál převést na jednoduchý a dvojný, tj.

$$\int_W \frac{1}{1+x+y}\, \mathrm{d}V = \int_0^1 \left( \int_{M_z} \frac{1}{1+x+y}\, \mathrm{d}A \right) \mathrm{d}z.$$

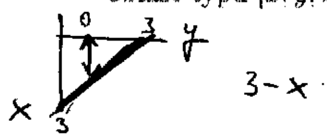
*d) M je ohraničena plochami $2x + 2y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$.*




Rovina $2x+2y+z = 6$ protíná souřadné osy v bodech o souřadnicích $x = 3$, $y = 3$, $z = 6$. Průmět množiny $M$ do roviny je trojúhelník o vrcholech $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$. Platí tedy

$$(x, y, z) \in M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 - x \\ 0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y \end{cases}$$

$M$ je v tomto případě čtyřstěn a jedná se o elementární oblast typu $[x, y, z]$.




## 2.6 Integrály na měřitelných množinách

V této kapitole rozšíříme pojem n-rozměrného integrálu na měřitelné množiny:

**Definice 2.5** *Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je integrovatelná na množině $M$, tj. že existuje integrál (Riemannův) z funkce $f$ na množině $M$, existuje-li interval $I \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $M \subset I$ a funkce $f \cdot \chi_M$ je na $I$ integrovatelná.*
*Potom klademe*

$$\int_M f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_I (f \cdot \chi_M)(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

V následujících úvahách se omezíme na $n = 2, 3$.
Postačující podmínku pro existenci integrálu udává následující věta:

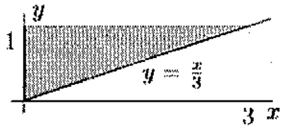
**Věta 2.5** *Je-li $M \subset \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ měřitelná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ je na $M$ ohraničená a skoro všude spojitá, pak je $f$ na $M$ integrovatelná.*

(Připomeňme, že nějaké tvrzení platí na množině $M$ skoro všude, jestliže platí $\forall x \in M \setminus A \subset \mathbb{R}^k$ a neplatí $\forall x \in A$, kde $\nu_k(A) = 0$ (tj. platí s výjimkou množiny nulové míry).)
Fubiniova věta pro výpočet integrálu se dá snadno rozšířit na elementární oblasti:

**Věta 2.6** *Nechť*

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; a \leq x \leq b, d(x) \leq y \leq h(x)\}, \quad \textit{resp.}$$
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; a \leq x \leq b, d_1(x) \leq y \leq h_1(x), d_2(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

**řešení:**
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast $\Omega$. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa $\Omega$. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál




$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 (\int_0^{3y} (\underbrace{\int_0^{x^2+y^2} 1\,dz}_{=x^2+y^2})\,dx)\,dy =$$

$$= \int_0^1 ( \underbrace{\int_0^{3y} (x^2+y^2)\,dx}_{=\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x:=0}^{x:=3y}=12y^3} )\,dy = \int_0^1 12y^3\,dy = 12\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = 3$$

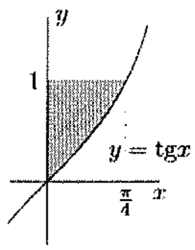
nebo jinak

$$V(\Omega) = \int_0^3 ( \underbrace{\int_{\frac{x}{3}}^1 (x^2+y^2)\,dy}_{=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y:=\frac{x}{3}}^{y:=1}=\frac{1}{3}+x^2-\frac{28}{81}x^3} )\,dx = \int_0^3 (\frac{1}{3}+x^2-\frac{28}{81}x^3)\,dx = \left[\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{81}x^4\right]_0^3 = 3\,.$$

**Příklad 9.8:**
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z];\, 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \operatorname{arctg} y, 0 \le z \le \frac{6x}{1+y^2}\right\}.$$

**řešení:**
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast $\Omega$. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa $\Omega$. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál




$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 (\int_0^{\operatorname{arctg} y} (\underbrace{\int_0^{\frac{6x}{1+y^2}} 1\,dz}_{=\frac{6x}{1+y^2}})\,dx)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{1+y^2} \underbrace{\int_0^{\operatorname{arctg} y} 6x\,dx}_{=[3x^2]_{x:=0}^{x:=\operatorname{arctg} y}=3\operatorname{arctg}^2 y} )\,dy = 3\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 y}{1+y^2}\,dy = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t^2}{1+y^2}\cdot(1+y^2)\,dt = 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64}\,,$$

použili jsme substituci $t := \operatorname{arctg} y$, pak $dt = \frac{1}{1+y^2}\,dy$ tedy $dy = (1+y^2)\,dt$, $0 \quad 0$ a $1 \quad \frac{\pi}{4}$.
Opět lze volit jiné pořadí integrace

$$V(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\int_{\operatorname{tg} x}^1 \frac{6x}{1+y^2}\,dy)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x\,[\operatorname{arctg} y]_{y:=\operatorname{tg} x}^{y:=1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x(\frac{\pi}{4}-x)\,dx = \left[\frac{3}{4}\pi x^2 - 2x^3\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64}\,,$$

neboť $\Omega$ lze charakterizovat také nerovnostmi $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ a $\operatorname{tg} x \le y \le 1$.

**Příklad 9.9:**
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z];\, 1 \le y \le 2, 0 \le x \le \ln y, 0 \le z \le \frac{6x}{y}\right\}.$$