10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Fubiniova)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ-konečné. Buď $(\mathbb{R}, \rho)$ součin měr μ a ν a $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\rho})$ jejich úplný součin. Nechť f je $\overline{\rho}$-měřitelná funkce na $\overline{\rho}$-měřitelné množině $M \subset X \times Y$. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y)\, d\overline{\rho}(x, y)$$

má smysl. Potom pro μ-skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y)\, d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_X g\, d\mu$$

a

$$\int_M f(x, y)\, d\overline{\rho}(x, y) = \int_X g\, d\mu = \int_X \Big(\int_{M^{x,*}} f(x, y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x).$$

Příklady

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 x \sin y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. $$\int_0^3 \int_0^1 \frac{x^2}{3 + y^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Spočtěte integrály

1. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

2. $$\int_0^\infty \frac{\ln(1 + a^2x^2) - \ln(1 + b^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

3. $$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

4. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctan} ax - \operatorname{arctan} bx}{x}\,\mathrm{d}x$$

5. $$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

6. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Spočtěte míru množiny

1.
$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x + 2\}$$

2.
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq x, 0 \leq z \leq xy^2\}$$

3. M, která je ohraničena plochami $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $z = 0$, $y = o$.

4.
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \arctan y, 0 \leq z \leq \frac{6x}{1 + y^2}\}$$

Spočtěte integrál přes množinu

1.
$$\int_M xy \mathrm{d}A$$

kde M je ohraničena křivkami $y = -x$ a $y = x - x^2$.

2.
$$\int_M x^2 + y^2 \mathrm{d}A$$

kde
$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

3.
$$\int_M y \cos(x + z) \mathrm{d}A$$

kde M je ohraničena plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$.

4.
$$\int_M \frac{\mathrm{d}A}{1 + x + y}$$

kde
$$M = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$