(1) $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx$

- pro $\alpha \geq 0$ $F(\alpha)$ konverguje
- pro $\alpha \in (0,\infty)$ $F(\alpha)$ splňuje

$$F''(\alpha) + F(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

(a) Dů

$$F'(\alpha) \overset{\text{dle } \text{věty}}{=} \int_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}(-x)}{1+x^2}\, dx$$

odůvodnění - DÚ

$$F''(\alpha) \overset{\text{dle } \text{věty}}{=} \int_0^\infty \frac{-x \cdot e^{-\alpha x}(-x)}{1+x^2}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx$$

pak

$$F''(\alpha) + F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}(x^2+1)}{x^2+1}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

(2) $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx$

(a) $D_F = [0, \infty)$

(b) F je spojitá na $[0, \infty)$

(před 2 týdny)

(c) $\lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha) = 0$

$f(x\alpha)$ je spoj v x i α → měřitelná

$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} = 0$

majoranta $\frac{1}{1+x^2}$

(d) F je nerostoucí

$F'(\alpha) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-\alpha x}(-x)}{1+x^2}}_{<0}\, dx \leq 0$ na $(0, \infty)$

e) F je konvexní

$F''(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx > 0$ na $(0, \infty)$

(d) $\max F(\alpha) = F(0) = \frac{\pi}{2}$

$\inf_{\alpha \in [0, \infty)} F(\alpha) = 0$

minima nenabývá

(3) $$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx$$

$$\lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha)$$ Heine

$$\lim_{j\to\infty} F(\alpha_j) \geq \liminf_{j\to\infty} F(\alpha_j) \geq \int_0^\infty \liminf_{j\to\infty} e^{-\alpha_j x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \lim_{j\to\infty} e^{-\alpha_j x}\, dx = \int_0^\infty 1\, dx = \infty$$

(4)

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

Heine, zvolme α_j

$$\lim_{j\to\infty} \int \geq \liminf_{j\to\infty} \int \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int \liminf f$$

$$\geq \int_0^\infty \lim_{j\to\infty} x^{\alpha_j - 1} e^{-x}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x}\, dx = \infty$$

konvergence u "0"

(5) $\lim\limits_{\alpha \to 2+} \int_0^\infty \frac{x}{2+x^\alpha}\,dx$

volíme $\alpha_j \xrightarrow{j\to\infty} 2+$

analogicky

$$\lim_{j\to\infty} \int \geq \liminf_{j\to\infty} \int \geq \int \liminf f = \int \lim_{j\to\infty}$$

$$\int_0^\infty \lim_{j\to\infty} \frac{x}{2+x^{\alpha_j}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{2+x^2}\,dx = \infty$$

$\downarrow$

div u ∞ jako $\frac{1}{x}$

(6)

$$\lim_{\alpha \to 1-} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\ln(\alpha - \sin x)} \, dx$$

tip

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\ln(1-\sin x)} \, dx$$

0^{+}: srovnáme s x^{-1}

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\ln(1-\sin x)}}{\frac{1}{x}} = \lim \underbrace{\frac{-\sin x}{\ln(1-\sin x)}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{x}{-\sin x}}_{-1} = -1$$

tedy $\int_0^{\pi/4} \frac{-dx}{\ln(1-\sin x)}$ se chová jako $\int_0 \frac{1}{x} dx$ Diverguje

Zvolme $\alpha_j \to 1-$ a zkoumejme $\int_0^{\pi/4} \frac{-1}{\ln(\alpha - \sin x)} dx$

Fatou

$$\lim_{j \to \infty} -F(\alpha) \geq \liminf_{j \to \infty} -F(\alpha) \geq \int_0^{\pi/4} \liminf_{j \to \infty} \frac{-1}{\ln(\alpha_j - \sin x)} dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \lim_{j \to \infty} \frac{-1}{\ln(\alpha_j - \sin x)} dx = \int_0^{\pi} \frac{-1}{\ln(1-\sin x)} dx = \infty$$

b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a} \qquad \text{pro} \quad a > 0 \,, \quad b,c \in E_1 \,.$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22 .

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} \, dx$!

Obdoba př. 6,33 , $F(a,b,c) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ pro $a > 0$, $b,c \in E_1$.

4 6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -\int_0^\infty e^{-ax^2} \, dx = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \text{(viz př. 5,84),}$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

tedy – vzhledem k $F(b,b) = 0$ – jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \qquad \text{pro} \quad a > 0 \,, \quad b \geq 0 \,.$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Toto tvrzení dokažte

Symetrie

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0$, $b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0$, $b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie. Vše podrobně proveďte !

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a .

5 6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \, dx$!

Musíme se proto omezit - obdobně jako u příkladů na spojitost - na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1,+\infty)$.

Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a\in\langle p,+\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro} \quad x \in (0,+\infty),$$

tedy $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x}\,dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro} \quad a \in \langle p,+\infty).$$

Protože $\langle p,+\infty)$ byl libovolný interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro všechna} \quad a \in (-1,+\infty)$$

(rozmyslete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$K(a) = \log(1+a) \quad \text{pro} \quad a \in (-1,+\infty).$$

(7) 6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{k}$ pro $k \in (0,+\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů - a,k. Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0,+\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0,+\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.

Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-kx}\cdot\frac{\sin ax}{x}\right)\right| = \left|e^{-kx}\cdot\cos ax\right| \le e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0,+\infty)$

(funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx}\cdot\cos ax\,dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{k} + C(k),$$

kde "konstanta" tentokrát může záviset na zvoleném $k \in (0,+\infty)$ (proč?).
Z původního integrálu je ovšem ihned vidět, že

$$F(0,k) = 0 \ , \quad \text{tj.} \quad C(k) = 0 \ .$$

II/ Zkusme nyní derivovat podle "k", nechť tedy $a \in E_1$ je pevné. Opět ověřte předpoklady věty 61,

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) = - e^{-kx} \cdot \sin ax \ .$$

Zde se nám již nepodaří najít majorantu společnou pro všechna $k \in (0,+\infty)$, to však nevadí - omezíme se opět pouze na $k \in (p,+\infty)$, kde $p > 0$.

Potom

$$\left| e^{-kx} \sin ax \right| \leqq e^{-kx} \leq e^{-px} \ , \qquad x \in (0,+\infty)$$

a funkce $G(x) = e^{-px}$ je hledaná konvergentní majoranta. Integrací opět dostáváme (proveďte podrobně!, viz 4,47)

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(a) \ ,$$

kde "konstanta" opět může záviset na (ze začátku pevně zvolené) hodnotě a. Rovnost platí pro všechna $k \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$ bylo libovolné číslo, tedy výsledek platí pro všechna $k \in (0,+\infty)$.
Zbývá ještě určit $C(a)$, zde nám není nic platné do získané rovnosti dosadit $a = 0$ (proč?). Zkusíme provést limitní přechod pro $k \to +\infty$, bude-li totiž existovat $\lim\limits_{k\to+\infty} F(a,k)$ (při pevném $a \in E_1$), bude

$$\lim_{k\to\infty} F(a,k) = \lim_{k\to\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{k} + C(a)\right] = C(a) \ .$$

Podle 4,20 (proveďte ještě jednou)! je $\lim\limits_{k\to\infty} F(a,k) = 0$ pro libovolné $a \in E_1$. Teda $C(a) = 0$ pro každé $a \in E_1$ a jsme hotovi. ||

Z tohoto příkladu bylo velmi dobře vidět, že nebylo tak docela jedno, derivovali-li jsme podle jedné či druhé proměnné. V prvním případě byl přeci jenom postup o něco jednodušší. V dalších příkladech se vždy snažte derivovat podle všech proměnných a jednotlivé metody porovnávejte!

6,23. Ukažte, že funkce $F(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx$ má v intervalu $(0,+\infty)$ derivace všech řádů. Spočtěte je!

|| 1/ Lehko zjistíme, že $F(a) = \frac{1}{a}$, odkud plyne tvrzení a vztah

$$6{,}26.\quad \text{Spočtěte}\quad F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx\ !$$

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$, $b > 0$.

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^\infty -xe^{-ax^2}\, dx = -\frac{1}{2a},$$ konvergentní majoranta je

$\boxed{G(x) = xe^{-px^2}}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty)$, $p > 0$.

Tedy

$F(a,b) = -\frac{1}{2}\log a + C(b)$, protože $F(b,b) = 0$,

je $C(b) = \frac{1}{2}\log b$, tj. $F(a,b) = \log\frac{b}{a}$.

8.

$$6{,}27.\quad \text{Spočtěte}\quad J(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx\ !$$

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0,\pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1,+1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x}.$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in \langle -p,+p\rangle$ a pro $x \in (0,\pi)$ platí

$$\left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| = \frac{1}{|1+a\cos x|} \leqq \frac{1}{1-|a\cos x|} \leqq \frac{1}{1-|a|} \leqq \frac{1}{1-p}$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0,\pi)$).

Pomocí substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \quad \text{pro } a \in (-1,+1).$$

c/ Ukažte, že $J(a) = \pi\arcsin a$ pro všechna $a \in \langle -1,+1\rangle$, stačí ukázat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$ (proč?), k důkazu posledního tvrzení použijte větu 60 a vztahu

$$a \in \langle -1,+1\rangle \Rightarrow \frac{\log(1-\cos x)}{\cos x} \leqq \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x} \leqq \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

proveďte podrobně ! ||

9.

6,28. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$!

|| a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$.

b/ Spočtěte $J(a)$ pomocí věty 61, dostanete

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x}$$ s konvergentní majorantou

$G(x) = \dfrac{2}{1-p^2}$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a \in \langle -p,+p\rangle \subset (-1,+1)$.

Po substituci $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $J'(a) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, tedy $(J(0) = 0)$ $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in (-1,+1)$.

c/ Ukažte, že funkce J je spojitá v intervalu $\langle -1,+1 \rangle$, odkud vyplyne, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$ – viz předchozí příklad 6,27.

d/ Použijte též výsledku př. 6,27, dostanete

$$\pi \cdot \arcsin a = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)\,dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx +$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-a\cos x)}{\cos x}\,dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,dx = J(a) \quad \text{pro } a \in \langle -1,+1 \rangle .$$ ||

6,29. Spočtěte $K(A) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+\sin A\cos x)}{\cos x}\,dx$!

|| a/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $A \in E_1$.

b/ Uvědomte si, že $K(A)$ je periodická funkce s periodou 2π.

c/ Při vlastním výpočtu (použití věty 61) je třeba vyloučit hodnoty, kde $|\sin A| = 1$ (proč?), vyjde $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$, $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k celé.

d/ Ukažte, že funkce K je spojitá v E_1, tedy $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$.

e/ Ukažte, že $K(A) = \pi A$ pro $A \in \langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \rangle$.

2553 Z12

10

$6{,}19.$ Spočtěte $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$!

1/ I když to v těchto příkladech není nutné, budeme vždy zkoumat, pro jaké hodnoty parametru a daný integrál konverguje.
Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův pro všechna $a \in E_1$.

2/ Podle věty 61 spočítáme $F'(a)$, vzhledem k tomu, že funkce F je lichá (proč?), omezíme se jen na hodnoty $a \geq 0$, tj. ve větě 61 položíme $M = (0, \frac{\pi}{2})$, $A = \langle 0,+\infty)$.

Ověřujeme jednotlivé předpoklady věty 61:

D
O
a/ pro každé $a \in \langle 0,+\infty)$ je $\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x} \in \Lambda_{(0,\frac{\pi}{2})}$ (proč?),

b/ integrál konverguje pro $a = 0$ (my jsme vlastně ukázali daleko více - že konverguje pro všechna $a \in E_1$!),

c/ pro každé $a \in \langle 0,+\infty)$ a každé $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ existuje

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\right) = \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x} ,$$

d/ musíme najít konvergentní majorantu k této derivaci, položme

$$\mathcal{G}(x) = \sup_{a\in\langle 0,+\infty)} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x} \qquad \text{pro} \quad x \in (0,\frac{\pi}{2}) ,$$

zřejmě $\mathcal{G}(x) = 1$ pro všechna $x \in (0,\frac{\pi}{2})$, tedy $\mathcal{G} \in \mathcal{L}_{(0,\frac{\pi}{2})}$.

Podle tvrzení věty 61 integrál konverguje pro všechna $a \in \langle 0,+\infty)$ a

D
O spočítat

$$F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}\,dx \qquad a \in \langle 0,+\infty) .$$

Podle př. 6,17 zjistíme, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a} , \qquad a \in \langle 0,+\infty) .$$

Odtud plyne, že existuje taková konstanta C , pro niž $F(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\log(1+a) + C$, $a \in \langle 0,+\infty)$ (odůvodněte!).

Zbývá nyní jen určit hodnotu konstanty C . Víme však, že předchozí rovnost platí pro všechna $a \in \langle 0,+\infty)$, tedy i pro $a = 0$. Protože $F(0) = 0$, dostáváme ihned, že

$$0 = F(0) = \frac{\pi}{2}\cdot\log(1+0) + C ,$$

tj. $C = 0$.

f/ Nakreslete graf funkce $K(A)$!

g/ Má funkce $K(A)$ všude v E_1 derivaci ?

h/ Porovnejte výsledek s př. 6,27 - stačilo položit $a = \sin A$.

11.

6,30. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a \in E_1$, $b \in E_1$ s výjimkou $a = b = 0$.

b/ Funkce $F(a,b)$ je sudá v „a" i „b" , omezte se proto na $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

c/ Zvolme libovolné $b \in (0,+\infty)$ pevné, buď $a \in (0,+\infty)$.
Podle věty 61 dostanete

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\, dx$$

(majoranta pro $a \in \langle p,+\infty)$) , kde $p > 0$

$$\left| \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\right| \leq \left|\frac{2}{a}\right| \leq \frac{2}{p} \in \mathcal{L}(0, \tfrac{\pi}{2}))$$

Substitucí $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{a+b}$.

Ze vztahu $F(b,b) = \pi \cdot \log b$ vyplyne konečně

$$\boxed{F(a,b) = \pi \cdot \log \frac{a+b}{2}} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \quad b > 0 .$$

d/ Ukažte, že výsledek platí i pro $a = 0$, $b > 0$ (či $a > 0$, $b = 0$) .
Buď tedy $b \in (0,+\infty)$ pevné, stačí ukázat, že funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a je spojitá v bodě 0 zprava. Použijte větu 60 ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a \in \langle 0,1 \rangle$) a odhadu

Spojitost

$$\log b^2\cos^2 x \leqq \log(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) \leqq \log(1 + b^2)$$

e/ Pomocí předchozího výsledku odtud odvoďte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2} ,$$

viz též př. 5,87 ; 8,64 .