9. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Limita integrálu závislého na parametru). *Nechť P je metrický prostor a $A \subset P$. Buď $a \in \overline{A} \setminus A$. Nechť funkce $f : A \times D \to \bar{\mathbb{R}}$ má následující vlastnosti:*

(Li-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ existuje $\lim_{t \to a,\, t \in A} f(t, x)$.*

(Li-2) *pro všechna $t \in A$ je funkce $f(t, \cdot)$ měřitelná,*

(Li-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in A$ a $x \in D$ je $|f(t, x)| \leq g(x)$.*

Potom

$$\int_D \lim_{t \to a,\, t \in A} f(t, x)\, d\mu(x) = \lim_{t \to a,\, t \in A} \int_D f(t, x)\, d\mu(x).$$

speciálně výrazy vyskytující se výše mají smysl.

Věta 2 (Spojitost integrálu závislého na parametru). *Nechť P je metrický prostor. Buď $a \in P$ a U okolí bodu a v P. Nechť funkce $f : U \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(Sp-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ spojitá v a,*

(Sp-2) *pro všechna $t \in U$ je funkce $f(t, \cdot)$ měřitelná,*

(Sp-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in U$ a $x \in D$ je $|f(t, x)| \leq g(x)$.*

Potom pro všechna $t \in U$ je $f(t, \cdot)$ integrovatelná a funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t, x)\, d\mu(x)$$

je spojitá v bodě a.

Lemma 3 (Fatouovo). *Nechť $D \in S$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D. Potom*

$$\int_D \liminf_j f_j \leq \liminf_j \int_D f_j.$$

Věta 4 (Derivace integrálu závislého na parametru). *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(De-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ diferencovatelná na I,*

(De-2) *pro všechna $\alpha \in I$ je funkce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná,* (De-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $\alpha \in I$ a $x \in D$ je*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\Big| \leq g(x),$$

(De-4) *existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $f(t_0, \cdot)$ je integrovatelná na D.*

Potom pro všechna $\alpha \in I$ je $f(\alpha, \cdot)$ integrovatelná na D, funkce

$$F : \alpha \mapsto \int_D f(\alpha, x)\, d\mu(x)$$

je diferencovatelná na I a platí vzorec

$$F'(\alpha) = \int_D \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, d\mu(x)\,.$$

Příklady

1. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$ konverguje pro $\alpha \geq 0$ a pro $\alpha \in (0, \infty)$ splňuje diferenciální rovnici $f'' + f = \frac{1}{\alpha}$.

2. Vyšetřete průběh funkce
$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}.$$

1. $$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x,$$

   na intervalu $(0, \infty)$.

   Spočtěte
   $$\lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha).$$

2. $$F(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha - 1} e^{-x}\, \mathrm{d}x,$$

   na intervalu $(0, \infty)$.

   Spočtěte
   $$\lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha).$$

3. $$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x}{2 + x^\alpha}\, \mathrm{d}x,$$

   na intervalu $(2, \infty)$.

   Spočtěte
   $$\lim_{\alpha \to 2+} F(\alpha).$$

Spočtěte

1.
$$F(\alpha,\beta)=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha=\beta)\vee(\alpha,\beta\geq 0)$$

Hint: $\int_0^\infty -e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}$

2.
$$F(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \beta\in(0,\infty),\alpha\in\mathbb{R}$$

Hint:dce dle α, $\int_0^\infty e^{-\beta x}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\beta/(\alpha^2+\beta^2)$.

3.
$$F(\alpha)=\int_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha\in(-1,1)$$

Hint: $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, arcsin $y'=1/\sqrt{1-y^2}$

4.
$$F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} \qquad \alpha\in(-1,1)$$

Hint: $\int_0^{\pi/2}\frac{2\,\mathrm{d}x}{1-\alpha^2\cos^2 x}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

5.
$$F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan\,(\alpha\mathrm{tg}\ x)}{\mathrm{tg}\ x}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

Hint: $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\alpha^2\mathrm{tg}\ ^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\alpha}$.

6.
$$F(\alpha,\beta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2\sin^2 x+\beta^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$$

Hint: dce dle α,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\alpha}\frac{\alpha^2\sin^2 x}{\alpha^2\sin^2 x+\beta^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\alpha+\beta}$$