Uvědomíme-li si konečně, že F je lichá funkce, dostáváme

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx = \operatorname{sign} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+|a|), \quad a \in E_1 .$$

6,20. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx = \operatorname{sign} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+|a|)$ pro $a \in E_1$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$, označte jej $F(a)$.

2/ Použijte výsledku cvičení 6,19 a substituce $\operatorname{tg} x = t$.

3/ Ukažte, že F je funkce lichá.

4/ Ověřte, že jsou splněny předpoklady věty 61 – $M = (0,+\infty)$, $A = \langle 0,+\infty)$.

Nejdůležitější je opět nalezení konvergentní majoranty:

$$G(x) = \sup_{a\in\langle 0,+\infty)} \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

Odtud plyne, že

$$F'(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

Ukažte, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

(nutno rozlišit případy $a = 0$, $a = 1$ anebo ukázat, že $F'(a)$ je spojitá v $\langle 0,+\infty)$ obojí proveďte podrobně!). Odtud vzhledem k podmínce $F(0) = 0$ a vzhledem k lichosti F dostáváme tvrzení.

1

6,21. Zkoumejte $\displaystyle K(a) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{x\,e^{x}}\,dx$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1,+\infty)$, pro $a \in (-\infty,-1\rangle$ je $K(a) = -\infty$.

2/ Ověřte předpoklady věty 61 $(M = (0,+\infty))$, $A = (-1,+\infty))$ – položíme-li

$$G(x) = \sup_{a\in A} \left| \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1-e^{-ax}}{xe^{x}}\right)\right| \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty),$$

je

$$G(x) = \sup_{a\in(-1,+\infty)} e^{-(a+1)x} = 1 \quad \text{pro každé } x \in (0,+\infty)$$

a tedy $G \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

(1) Musíme se proto omezit – obdobně jako u příkladů na spojitost – na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1,+\infty)$.

Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a\in\langle p,+\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro} \quad x \in (0,+\infty),$$

tedy $G \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x}\,dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro} \quad a \in \langle p,+\infty).$$

Protože $\langle p,+\infty)$ byl libovolný interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \qquad \text{pro všechna} \quad a \in (-1,+\infty)$$

(rozmyslete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$\boxed{K(a) = \log(1+a)} \qquad \text{pro} \quad a \in (-1,+\infty).$$

6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\,dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k}$ pro $k \in (0,+\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů – a,k. Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0,+\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0,+\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.

Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-kx}\cdot\frac{\sin ax}{x}\right)\right| = \left|e^{-kx}\cdot\cos ax\right| \leq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0,+\infty)$

(funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx}\cdot\cos ax\,dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{k} + C(k),$$

(2) $F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}} \, dx$

$D = (0, \infty)$ $\qquad$ $I = (-1, \infty)$

(1) $f(\cdot, x)$ diferencovatelná (x pevné, dle α diferenc.)

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{-e^{-\alpha x^2} \cdot (-x^2)}{x e^{x^2}} = x e^{-x^2(\alpha+1)}$$

(3) majoranta

sup nepůjde

interval $[p, \infty) \subset (-1, \infty)$

majoranta $\underline{x e^{-x^2(p+1)}} \in L^1 \underbrace{(0, \infty)}_{D}$

(2) $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná $\forall \alpha \in (-1, \infty)$

(spojitá!)

(4) $\alpha_0 = 0$ $\qquad$ $\int_0^{\infty} \frac{0}{x e^{x^2}} dx = 0$ $\quad$ ok

Pak $F'(\alpha) = \int_0^{\infty} x e^{-(\alpha+1)x^2} dx = \frac{1}{2(\alpha+1)}$ $\qquad$ $\alpha \in (-1, \infty)$

$F(0) = 0$ $\quad \Rightarrow$

$$\underline{\underline{F(\alpha) = \frac{1}{2} \ln(\alpha+1)}}$$

3

6,26. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$, $b > 0$.

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty -xe^{-ax^2}\,dx = -\frac{1}{2a}\text{, konvergentní majoranta je}$$

$G(x) = xe^{-px^2}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty)$, $p > 0$.

Tedy

$F(a,b) = -\frac{1}{2}\log a + C(b)$, protože $F(b,b) = 0$,

je $C(b) = \frac{1}{2}\log b$, tj. $F(a,b) = \log\frac{b}{a}$.

6,27. Spočtěte $J(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0,\pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1,+1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x}\ .$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in \langle -p,+p\rangle$ a pro $x \in (0,\pi)$ platí

$$\left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| = \frac{1}{|1+a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a|} \leq \frac{1}{1-p}\ ,$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0,\pi)$).

Pomocí substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\ ,$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \qquad \text{pro } a \in (-1,+1)\ .$$

c/ Ukažte, že $J(a) = \pi\arcsin a$ pro všechna $a \in \langle -1,+1\rangle$, stačí ukázat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$ (proč?), b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0\,, \quad b,c \in E_1\,.$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22 .

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax}\,\frac{\cos bx - \cos cx}{x}\,dx$!

Obdoba př. 6,33 , $F(a,b,c) = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ pro $a > 0$, $b,c \in E_1$.

(4) 6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(viz př. 5,84)},$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

tedy – vzhledem k $F(b,b) = 0$ – jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro} \quad a > 0\,, \quad b \geq 0\,.$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Symetrie

Toto tvrzení dokažte

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0$, $b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0$, $b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie. Vše podrobně proveďte !

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a .

(5) 6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}}\,dx$!

$\left[\text{Majoranta} \quad e^{-(p+1)x^2}, \quad p \in (-1,\infty),\right.$

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+\infty)$.

b/ Pro $a \in (-1,+\infty)$ je podle věty 61 a př. 5,84

$$J'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a+1}}, \quad \text{tedy}$$

$$J(a) = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{a+1} - 1) \quad \text{pro } a \in (-1,+\infty).$$

c/ Ukažte, že $J(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí dokázat, že funkce J je spojitá v bodě -1 zprava (proč?), k důkazu tohoto tvrzení použijte větu 60, kde položíte $M = (0,+\infty)$, $A = \langle -1,0\rangle$ a použijete odhadu

$$\left|\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2e^{x^2}}\right| \le \frac{e^{x^2}-1}{x^2e^{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}\ \Big]$$

6,37. Spočtěte $K(a,b) = \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a,b \in E_1$.

b/ Protože funkce $K(a,b)$ je sudá funkce jak v proměnné „a", tak v „b", omezíme se na $a \ge 0$, $b \ge 0$.

c/ Buď tedy $b \ge 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$. Potom je $\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty -\frac{2a}{x^2}\cdot e^{-\frac{a^2}{x^2}}\,dx$

(majoranta – pro $a \in \langle p,q\rangle$, kde $0 < p < q < +\infty$ – určíme podle následujícího odhadu – proveďte !

$$\left|-\frac{2a}{x^2}\,e^{-\frac{a^2}{x^2}}\right| \le \frac{2q}{x^2}\cdot e^{-\frac{p^2}{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

Substitucí $t = \frac{1}{x}$ převedeme poslední integrál na Laplaceův integrál – př. 5,84 – dostaneme

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = -\sqrt{\pi},$$

tedy vzhledem k $K(b,b) = 0$ vyjde

$$K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b-a) \quad \text{pro } b \ge 0,\ a > 0.$$

d/ Ukažte, že $K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b - a)$ pro všechna $a,b \in E_1$ (viz obdobný příklad 6,35).

e/ Porovnejte též s příkladem 5,76 e.]

Musíme ještě určit "konstantu" $C(b)$. Vzhledem k části c/ dostáváme

$$K(0,b) = \lim_{a\to 0_+} K(a,b) = \lim_{a\to 0_+}\left[\frac{\pi}{b}\cdot\log(b+a) + C(b)\right] = \frac{\pi}{b}\cdot\log b + C(b)$$

a zbývá nám tedy pouze spočítat $K(0,b) = \int_0^\infty \frac{\log x^2}{b^2+x^2}\,dx$. Pomocí substitucí $x = bt$, $t = \frac{1}{u}$ zjistíme, že $K(0,b) = \frac{\pi}{b}\log b$,

tedy $C(b) = 0$.

e/ Lehko zjistíte, že

$$K(a,b) = \frac{\pi}{|b|}\cdot\log(|a| + |b|) \quad \text{pro } a,b\in E_1 ,\ b\neq 0 . \|$$

6,43. Spočtěte $F(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cdot\cos bx - e^{-\alpha x}\cdot\cos\beta x}{x}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a > 0$, $\alpha > 0$, $b,\beta\in E_1$.

b/ Ukažte, že (viz př. 4,47 a 4,48)

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-px} pro $a\in\langle p,+\infty)$, kde $p > 0$) ,

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-ax}) .

Odtud plyne , že

$$F(a,b,\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + C(\alpha,\beta) \quad \text{a}$$

vzhledem k podmínce $F(\alpha,\beta,\alpha,\beta) = 0$ jest

$$F(a,b,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2+b^2} \quad \text{pro } a > 0 ,\ \alpha > 0 ,\ b,\beta\in E_1 . \|$$

6 ! **6,44.** Spočtěte $J(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a > 0$, $b > 0$ či $a < 0$, $b < 0$.

b/ Předpokládejme, že $b > 0$ je pevné, buď $a\in(0,+\infty)$.

Potom

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$$

(majoranta $\frac{1}{1+p^2x^2}$ pro $a\in\langle p,+\infty)$, kde $p > 0$) .

Vzhledem k podmínce $J(b,b) = 0$ je

$$J(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b} \quad \text{pro } a > 0 , \ b > 0 .$$

c/ Jaký je výsledek pro $a < 0$, $b < 0$?

d/ Porovnejte též s příkladem 5,71. ||

6,45.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax \cdot \operatorname{arctg} bx}{x^2} \, dx$!

|| a/ Integrál konverguje pro každé $a \in E_1$, $b \in E_1$.

b/ Buď $a \in E_1$, potom funkce $H^{a,*}(b)$ je spojitá v E_1 (pro $b \in \langle -p,+p \rangle$ kde $p > 0$ je

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} ax \cdot \operatorname{arctg} bx}{x^2} \right| \leq \frac{|\operatorname{arctg} ax| \cdot |\operatorname{arctg} px|}{x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

c/ Obdobně funkce $H^{*,b}(a)$ je spojitá v E_1 pro každé $b \in E_1$.

d/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+a^2x^2)} \, dx$$

(majoranta $\frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+p^2x^2)} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$) .

Je nutno nyní spočítat tento integrál.

1/ Podle příkladu 6,20 je

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} \, dx = \frac{\pi}{2} \log (1+\alpha) \quad \text{pro } \alpha > 0 ,$$

provedeme-li tedy v našem integrálu substituci $ax = t$, bude

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a}$$

2/ Kdybychom neznali výsledek příkladu 6,20 , byli bychom nuceni postupovat stejně jako v 6,20 , dostali bychom vlastně, že

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b}(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)} \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+b}$$

a odtud vzhledem k podmínce $\frac{\partial H}{\partial a}(a,0) = 0$ by bylo

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a} \quad \text{pro } a > 0 , \ b \geq 0 .$$

Musíme se proto omezit - obdobně jako u příkladů na spojitost - na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1, +\infty)$.
Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle p, +\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro} \quad x \in (0, +\infty),$$

tedy $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x}\, dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro} \quad a \in \langle p, +\infty).$$

Protože $\langle p, +\infty)$ byl libovolný interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro všechna} \quad a \in (-1, +\infty)$$

(rozmyslete!).
Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$K(a) = \log(1+a) \quad \text{pro} \quad a \in (-1, +\infty).$$

(7) 6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\, dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k}$ pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů - a, k.
Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0, +\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.
Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} \left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) \right| = \left| e^{-kx} \cdot \cos ax \right| \leq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0, +\infty)$
(funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$).
Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot \cos ax\, dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).
Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(k),$$

kde "konstanta" tentokrát může záviset na zvoleném $k \in (0,+\infty)$ (proč?).
Z původního integrálu je ovšem ihned vidět, že

$$F(0,k) = 0 \ , \quad \text{tj.} \quad C(k) = 0 \ .$$

II/ Zkusme nyní derivovat podle "k", nechť tedy $a \in E_1$ je pevné. Opět ověřte předpoklady věty 61 ,

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) = - e^{-kx} \cdot \sin ax \ .$$

Zde se nám již nepodaří najít majorantu společnou pro všechna $k \in (0,+\infty)$, to však nevadí - omezíme se opět pouze na $k \in (p,+\infty)$, kde $p > 0$.

Potom

$$\left| e^{-kx} \sin ax \right| \leqq e^{-kx} \leq e^{-px} \ , \qquad x \in (0,+\infty)$$

a funkce $G(x) = e^{-px}$ je hledaná konvergentní majoranta. Integrací opět dostáváme (proveďte podrobně!, viz 4,47)

$$F(a,k) = \text{arc tg}\,\frac{a}{k} + C(a) \ ,$$

kde "konstanta" opět může záviset na (ze začátku pevně zvolené) hodnotě a . Rovnost platí pro všechna $k \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$ bylo libovolné číslo, tedy výsledek platí pro všechna $k \in (0,+\infty)$.
Zbývá ještě určit $C(a)$, zde nám není nic platné do získané rovnosti dosadit $a = 0$ (proč?). Zkusíme provést limitní přechod pro $k \to +\infty$, bude-li totiž existovat $\lim\limits_{k\to+\infty} F(a,k)$ (při pevném $a \in E_1$), bude

$$\lim_{k\to\infty} F(a,k) = \lim_{k\to\infty}\left[\text{arc tg}\,\frac{a}{k} + C(a)\right] = C(a) \ .$$

Podle 4,20 (proveďte ještě jednou)! je $\lim\limits_{k\to\infty} F(a,k) = 0$ pro libovolné $a \in E_1$. Teda $C(a) = 0$ pro každé $a \in E_1$ a jsme hotovi.

Z tohoto příkladu bylo velmi dobře vidět, že nebylo tak docela jedno, derivovali-li jsme podle jedné či druhé proměnné. V prvním případě byl přeci jenom postup o něco jednodušší. V dalších příkladech se vždy snažte derivovat podle všech proměnných a jednotlivé metody porovnávejte!

6,23. Ukažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\,dx$ má v intervalu $(0,+\infty)$ derivace všech řádů. Spočtěte je !

1/ Lehko zjistíme, že $F(a) = \frac{1}{a}$, odkud plyne tvrzení a vztah

6,26. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$, $b > 0$.

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^\infty -xe^{-ax^2}\, dx = -\frac{1}{2a}\,,$$ konvergentní majoranta je

$\boxed{G(x) = xe^{-px^2}}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty)$, $p > 0$.

Tedy

$F(a,b) = -\frac{1}{2}\log a + C(b)$, protože $F(b,b) = 0$,

je $C(b) = \frac{1}{2}\log b$, tj. $F(a,b) = \log \frac{b}{a}$.

8. 6,27. Spočtěte $J(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0,\pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1,+1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x}\,.$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in \langle -p,+p\rangle$ a pro $x \in (0,\pi)$ platí

$$\left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| = \frac{1}{|1+a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a\cos x|} \leq \frac{1}{1-|a|} \leq \frac{1}{1-p}$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0,\pi)$).

Pomocí substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\,,$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \qquad \text{pro } a \in (-1,+1)\,.$$

c/ Ukažte, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro všechna $a \in \langle -1,+1\rangle$, stačí ukázat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$ (proč?),

75735 F12

k důkazu posledního tvrzení použijte větu 60 a vztahu

$$a \in \langle -1,+1\rangle \Rightarrow \frac{\log(1-\cos x)}{\cos x} \leqq \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x} \leqq \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

proveďte podrobně ! ‖

9.

6,28. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$.

b/ Spočtěte $J(a)$ pomocí věty 61, dostanete

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x} \quad \text{a konvergentní majorantou}$$

$G(x) = \frac{2}{1-p^2}$ pro $x \in (0,\frac{\pi}{2})$, $a \in \langle -p,+p\rangle \subset (-1,+1)$.

Po substituci $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, tedy

$(J(0) = 0)$ $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in (-1,+1)$.

c/ Ukažte, že funkce J je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$, odkud vyplyne, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in \langle -1,+1\rangle$ – viz předchozí příklad 6,27.

d/ Použijte též výsledku př. 6,27, dostanete

$$\pi \cdot \arcsin a = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)\,dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-a\cos x)}{\cos x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,dx = J(a) \quad \text{pro } a \in \langle -1,+1\rangle .$$ ‖

6,29. Spočtěte $K(A) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+\sin A\cos x)}{\cos x}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $A \in E_1$.

b/ Uvědomte si, že $K(A)$ je periodická funkce s periodou 2π.

c/ Při vlastním výpočtu (použití věty 61) je třeba vyloučit hodnoty, kde $|\sin A| = 1$ (proč?), vyjde $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$, $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k celé.

d/ Ukažte, že funkce K je spojitá v E_1, tedy $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$.

e/ Ukažte, že $K(A) = \pi A$ pro $A \in \langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\rangle$.

25535 212

(10)

6,19. Spočtěte $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\,\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x}\,dx$!

1/ I když to v těchto příkladech není nutné, budeme vždy zkoumat, pro jaké hodnoty parametru a daný integrál konverguje.
Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův pro všechna $a \in E_1$.

2/ Podle věty 61 spočítáme $F'(a)$, vzhledem k tomu, že funkce F je lichá (proč?), omezíme se jen na hodnoty $a \geq 0$, tj. ve větě 61 položíme $\boxed{M = (0, \frac{\pi}{2})}$, $\boxed{A = \langle 0,+\infty)}$.

Ověřujeme jednotlivé předpoklady věty 61:

D
O

a/ pro každé $a \in \langle 0,+\infty)$ je $\boxed{\frac{\operatorname{arctg}(a\,\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x} \in \Lambda_{(0,\frac{\pi}{2})}}$ (proč?),

b/ integrál konverguje pro $\boxed{a = 0}$ (my jsme vlastně ukázali daleko více - že konverguje pro všechna $a \in E_1$!),

c/ pro každé $a \in \langle 0,+\infty)$ a každé $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ existuje

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\operatorname{arctg}(a\,\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x}\right) = \frac{1}{1+a^2\mathrm{tg}^2x}},$$

d/ musíme najít konvergentní majorantu k této derivaci, položme

$$\mathcal{G}(x) = \sup_{a\in\langle 0,+\infty)} \frac{1}{1+a^2\mathrm{tg}^2x} \qquad \text{pro } x \in (0,\frac{\pi}{2}) ,$$

zřejmě $\boxed{\mathcal{G}(x) = 1}$ pro všechna $x \in (0,\frac{\pi}{2})$, tedy $\mathcal{G} \in \mathscr{L}_{(0,\frac{\pi}{2})}$.

Podle tvrzení věty 61 integrál konverguje pro všechna $a \in \langle 0,+\infty)$ a

D
O spočítat

$$\boxed{F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\mathrm{tg}^2x}\,dx} \quad a \in \langle 0,+\infty) .$$

Podle př. 6,17 zjistíme, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a} , \qquad a \in \langle 0,+\infty).$$

Odtud plyne, že existuje taková konstanta C , pro niž $F(a) = $
$\boxed{= \frac{\pi}{2}\cdot\log(1+a) + C,}$ $a \in \langle 0,+\infty)$ (odůvodněte!).

Zbývá nyní jen určit hodnotu konstanty C . Víme však, že předchozí rovnost platí pro všechna $a \in \langle 0,+\infty)$, tedy i pro $a = 0$. Protože $F(0) = 0$, dostáváme ihned, že

$$0 = F(0) = \frac{\pi}{2}\cdot\log(1+0) + C ,$$

$\boxed{\text{tj. } C = 0 .}$

f/ Nakreslete graf funkce $K(A)$!

g/ Má funkce $K(A)$ všude v E_1 derivaci ?

h/ Porovnejte výsledek s př. 6,27 – stačilo položit $a = \sin A$.

11.

6,30. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a \in E_1$, $b \in E_1$ s výjimkou $a = b = 0$.

b/ Funkce $F(a,b)$ je sudá v „a" i „b" , omezte se proto na $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

c/ Zvolme libovolné $b \in (0,+\infty)$ pevné, buď $a \in (0,+\infty)$.

Podle věty 61 dostanete

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\, dx$$

(majoranta pro $a \in \langle p,+\infty)$) , kde $p > 0$

$$\left| \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\right| \leqq \left|\frac{2}{a}\right| \leqq \frac{2}{p} \in \mathscr{L}(0,\tfrac{\pi}{2}))$$

Substitucí $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{a+b}$.

Ze vztahu $F(b,b) = \pi \cdot \log b$ vyplyne konečně

$$F(a,b) = \pi \cdot \log \frac{a+b}{2} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \quad b > 0 .$$

d/ Ukažte, že výsledek platí i pro $a = 0$, $b > 0$ (či $a > 0$, $b = 0$) .

Buď tedy $b \in (0,+\infty)$ pevné, stačí ukázat, že funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a je spojitá v bodě 0 zprava. Použijte větu 60 ($x \in (0,\frac{\pi}{2})$, $a \in \langle 0,1 \rangle$) a odhadu

spojitost

$$\log b^2\cos^2 x \leqq \log(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) \leqq \log(1 + b^2)$$

e/ Pomocí předchozího výsledku odtud odvoďte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2} ,$$

viz též př. 5,87 ; 8,64 .