# 8. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

## Teorie

**Věta 1** (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(De-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ diferencovatelná na $I$,*

(De-2) *pro všechna $\alpha \in I$ je funkce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná,*

(De-3) *existuje integrovatelná funkce $g$ na $D$ tak, že pro všechna $\alpha \in I$ a $x \in D$ je*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\right| \leq g(x),$$

(De-4) *existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $f(t_0, \cdot)$ je integrovatelná na $D$.*

*Potom pro všechna $\alpha \in I$ je $f(\alpha, \cdot)$ integrovatelná na $D$, funkce*

$$F : \alpha \mapsto \int_D f(\alpha, x)\, d\mu(x)$$

*je diferencovatelná na $I$ a platí vzorec*

$$F'(\alpha) = \int_D \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, d\mu(x)\,.$$

## Příklady

Spočtěte

1.
$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^x}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, \infty)$$

2.
$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, \infty)$$

3.
$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta > 0)$$

4.
$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta \geq 0)$$

Hint: $\int_0^\infty -e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}$

5.
$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}} \, \mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, \infty)$$

6.
$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\arctan \alpha x - \arctan \beta x}{x} \, \mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta > 0) \vee (\alpha, \beta < 0)$$

7.
$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} \, \mathrm{d}x \qquad \beta \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$$

Hint:dce dle $\alpha$, $\int_0^\infty e^{-\beta x} \cos \alpha x \, \mathrm{d}x = \beta/(\alpha^2 + \beta^2)$.

8.
$$F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + \alpha \cos x)}{\cos x} \, \mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, 1)$$

Hint: $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1 + \alpha \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$, $\arcsin\, y' = 1/\sqrt{1 - y^2}$

9.
$$F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + \alpha \cos x}{1 - \alpha \cos x} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} \qquad \alpha \in (-1, 1)$$

Hint: $\int_0^{\pi/2} \frac{2 \, \mathrm{d}x}{1 - \alpha^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$.

10.
$$F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan\, (\alpha \mathrm{tg}\ x)}{\mathrm{tg}\ x} \, \mathrm{d}x \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Hint: $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \alpha^2 \mathrm{tg}\ ^2 x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \alpha}$.

11.
$$F(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 x) \, \mathrm{d}x \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$$

Hint: dce dle $\alpha$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\alpha} \frac{\alpha^2 \sin^2 x}{\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\alpha + \beta}$$