$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dx$$

(a) D_f

(b) spojitost

(c) limity

(a) $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dx = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

$\alpha \leq 0$ div

$F(\alpha) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha) = \lim \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha) = \lim \frac{1}{\alpha} = \infty$$

(b) věta

$f(\alpha, x) = e^{-\alpha x}$ $\qquad \underset{\alpha}{(0,\infty)} \times \underset{x}{(0,\infty)}$

$\qquad \qquad \qquad \qquad U \times D$

(Sp-1) $f(\cdot, x)$ spojitá v α pro s.v. $x \in (0,\infty)$

(Sp-2) $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná $\alpha \in (0,\infty)$

(Sp-3) majoranta

Pozor $\sup_{\alpha \in (0,\infty)} e^{-\alpha x} = 1 =: g(x) \notin L^1(0,\infty)$

Trik $A = [\delta, \infty)$

$$\sup_{\alpha \in [\delta, \infty)} |e^{-\alpha x}| \le e^{-\delta x} = g(x) \in L^1(0, \infty)$$

majoranta :)

(c) limity

(Li-2) stejné

(Li-3) majoranta na $\overset{\alpha}{[10, \infty)} = A$

(Li-1) s.v. $x \in (0, \infty)$ x pevné

$$\lim_{\alpha \to \infty} e^{-\alpha x} = 0 \checkmark$$

3/ F je spojitá v (p,q) $\Longleftrightarrow$ F je spojitá v <u>každém</u> intervalu

$\langle p_0, q) \subset (p,q)$.

Těchto jednoduchých vět tedy budeme v dalších příkladech používat, podrobně si je prostudujte a promyslete!

Tatáž poznámka platí i pro použití věty 61, hledáme-li konvergentní majorantu $\mathcal{G}$, kde opět bývá nejlepší zkusit

$$\mathcal{G}(x) = \sup_{\alpha \in A} \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right|.$$

6,3.	Ukažte, že funkce F, $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}\, dx$, je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$.

1/ Ukažte nejdříve – jako cvičení – že tento integrál konverguje, právě když $\alpha \in \langle 0, +\infty)$.

2/ Ukážeme, že F je spojitá v $\langle 0, +\infty)$, použijeme větu 60, kde klademe $M = (0, +\infty)$, $A = \langle 0, +\infty)$. Ověříme předpoklady:

Sp-2 1/ pro každé $\alpha \in \langle 0, +\infty)$ je funkce $\frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$ (jakožto funkce x !) spojitá v $(0, +\infty)$, tedy $\frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$

Sp-1 2/ pro každé $x \in (0, +\infty)$ je funkce $\frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$ (jakožto funkce α !) spojitá v $\langle 0, +\infty)$,

Sp-3 3/ Položíme-li $g(x) = \sup_{\alpha \in \langle 0,+\infty)} \frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$, je $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ na $(0, +\infty)$ a tedy $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Tím jsme ověřili všechny předpoklady věty 60 a podle tvrzení této věty je funkce F spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$ ‖

6,4.	Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx$ je spojitá v $(0, +\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $\alpha \in (0, +\infty)$.

2/ Ukážeme, že F je spojitá v $(0, +\infty)$, položte ve větě 60 $A = (0, +\infty)$, $M = (0, +\infty)$ a ověřte předpoklady 1/ a 2/.

Hledejme konvergentní majorantu, nejvýhodnější je zkusit $g(x) =$

welzp $\sup_{\alpha \in (0,+\infty)} e^{-\alpha x}$, odtud plyne, že $g(x) = 1$ pro každé $x \in (0, +\infty)$ a není tudíž $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (proč?).

Zkusme postupovat podle poznámky 6,2. Stačí, ukážeme-li, že funkce F

a/ $g_1(x) = \dfrac{|\cos x|}{x^q} + \dfrac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \dfrac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max\left(\dfrac{1}{x^p}, \dfrac{1}{x^p}\right)$

d/ $g_4(x) = \dfrac{1}{x^p} + \dfrac{1}{x^q}$. ‖

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x}\, dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$.

1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0, +\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$.

Majoranta $g(x) = \sup\limits_{s \in \langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1), \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1, +\infty), \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0, +\infty)$ pro $s \in \langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max\left(e^{-x} x^{p-1}, e^{-x} x^{q-1}\right)$,

b/ $g_2(x) = e^{-x}\left(x^{p-1} + x^{q-1}\right)$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1, +\infty) \ . \end{cases}$ ‖

6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^\infty \dfrac{x^{b-1}}{1+x}\, dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

2/ F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p,q\rangle \subset (0,1)$,

konvergentní majoranty:

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}}{1+x} & \text{pro } x \in (0,1) \\[2mm] \dfrac{x^{q-1}}{1+x} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ x^{q-2} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

$$g_3(x) = x^{p-1} + x^{q-2} \qquad \text{apod.}$$

6,12. Dokažte, že

a/ $F(a) = \int_0^1 \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$,

b/ $F(a) = \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x(x+a)^2}\,dx$ -"- v $(-1,+\infty)$,

c/ $F(a) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)}\,dx$ -"- v $(-\infty,2)$,

d/ $F(a) = \int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ -"- $(-1,+\infty)$,

e/ $F(a) = \int_1^2 \frac{dx}{|\log x|^a}$ -"- $(-\infty,1)$,

f/ $F(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,e^{-ax}\,dx$ -"- $(0,+\infty)$,

g/ $F(a) = \int_0^1 \log(x^2+a^2)\,dx$ -"- $(0,+\infty)$.

6,13. Uvažujeme $F(a) = \int_0^\infty a\,e^{-a^2x}\,dx$.

1/ Dokažte, že integrál konverguje pro každé $a \in E_1$

2/ Dokažte, že F je funkce lichá.

3/ Dokažte, že F je spojitá v $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

Vezměte libovolný interval $\langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$, potom zřejmě

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2}\, dx$$

$\alpha \in (-\infty, \infty)$

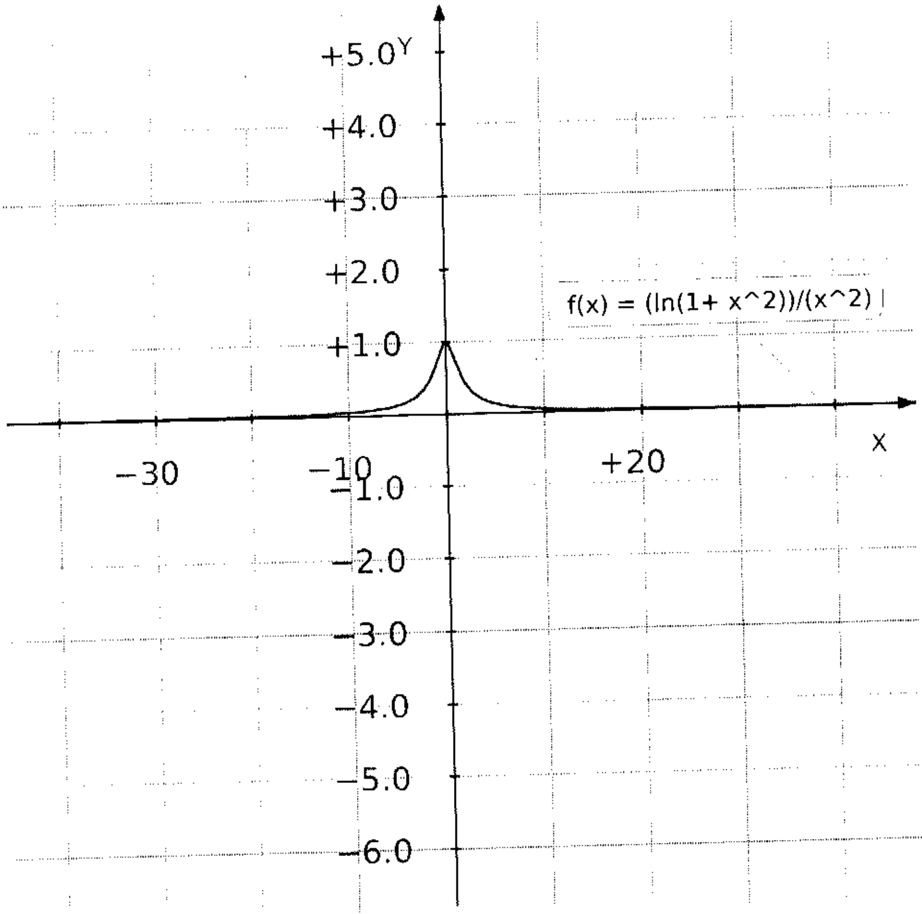
(1) $f(\cdot, x)$, $x \in (0,\infty)$ je spoj. v (α) (složení spoj. fcí)

(2) $\forall \alpha \in (-\infty,\infty)$ je fce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná (dodefinujeme)

(3) majoranta

pro $[-p, p]$

$$g(x) = \frac{\ln(1+p^2x^2)}{x^2}.$$


+5.0 Y
+4.0
+3.0
+2.0
+1.0
f(x) = (ln(1+ x^2))/(x^2)
−30
−10
+20
X
−1.0
−2.0
−3.0
−4.0
−5.0
−6.0

$$a \in \langle p,q \rangle \Rightarrow \left| a e^{-a^2 x} \right| \leq q e^{-p^2 x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} . \|$$

4/ Zkoumejme nyní spojitost funkce F v bodě $a = 0$. Abychom ukázali, že F je spojitá v bodě $a = 0$, stačilo by ukázat (ale není to nutné!), že F je spojitá v nějakém intervalu $\langle -p, +p \rangle$, kde $p > 0$. Zkoumejme, jak vypadala majoranta na intervalu $(0,+\infty)$ pro $a \in \langle -p,p \rangle$

$$g(x) = \sup_{a \in \langle -p,p \rangle} \left| a e^{-a^2 x} \right| = \max \left(p e^{-p^2 x} ; \quad \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-\frac{1}{2}} \right)$$

(proveďte podrobně!). Protože $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, nemůže být ani $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$. Vidíme, že se nám nepodaří nalézt konvergentní majorantu k funkci $a e^{-a^2 x}$ na $(0,+\infty)$ pro žádný interval $\langle -p,+p \rangle$ (z toho ovšem ještě neplyne, že by funkce F nebyla spojitá v bodě $a = 0$!). Spočtěte však, že $F(0) = 0$, $F(a) = \frac{1}{a}$ pro $a \neq 0$ – tedy F není spojitá v bodě $a = 0$.

I když tedy funkce $f(x,a)$ byla spojitá pro každé pevné $x \in (0,+\infty)$ v bodě $a = 0$, není funkce $F(a) = \int_0^{\infty} f(x,a)\, dx$ spojitá v bodě $a = 0$.

$\boxed{6,14.}$ Uvažujme $F(a) = \int^{1} \operatorname{sign}(x-a)\, dx$.

a/ $g_1(x) = \dfrac{|\cos x|}{x^q} + \dfrac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \dfrac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max \left(\dfrac{1}{x^p} , \dfrac{1}{x^p} \right)$

d/ $g_4(x) = \dfrac{1}{x^p} + \dfrac{1}{x^q}$.

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x}\, dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$.

$\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} = \int_0^\infty \dfrac{e^{-x}}{x} = \infty$

1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0,+\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$.

Majoranta $g(x) = \sup\limits_{s \in \langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) , \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1,+\infty) , \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0,+\infty)$ pro $s \in \langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max (e^{-x} x^{p-1} , e^{-x} x^{q-1})$,

b/ $g_2(x) = e^{-x} (x^{p-1} + x^{q-1})$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1,+\infty) . \end{cases}$

6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^\infty \dfrac{x^{b-1}}{1+x}\, dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

3/ $F(a) = \int_0^1 x^a\,dx$ je spojitá funkce v $(-1,+\infty)$,

4/ $F(n) = \int_1^{\infty} x^n\,dx$ je spojitá funkce v $(-\infty,-1)$,

5/ $F(y) = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}\,dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$.

6,8. Dokažte, že funkce $F(a) = \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{2 + x^a}$ je spojitá funkce v intervalu $(2,+\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a \in (2,+\infty)$, viz př. 3,44-10.

2/ Ukažte, že F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p,+\infty)$, kde $p > 2$.

Položíte-li $g(x) = \sup\limits_{a\in\langle p,+\infty)} \frac{x}{2 + x^a}$ pro $x \in (0,+\infty)$

je

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in (0,1) \\ \frac{x}{2 + x^p} & \text{pro } x \in \langle 1,+\infty) . \end{cases}$$

(Promyslete a odůvodněte!)

Protože $\frac{x}{2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a $\frac{x}{2 + x^p} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ je

$g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (opět odůvodněte!) a jsou splněny předpoklady věty 60.

6,9. Ukažte, že funkce $I(a) = \int_{1/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,dx$ je spojitá v intervalu $(1,+\infty)$.

1/ Ukažte, že pro $a \in (1,+\infty)$ integrál konverguje.

2/ Ukažte, že funkce I je spojitá v každém intervalu $\langle p,q\rangle \subset (1,+\infty)$,

majoranta $g(x) = \sup\limits_{a\in\langle p,q\rangle} \left| \frac{\cos x}{x^a} \right| = \begin{cases} \frac{|\cos x|}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{|\cos x|}{x^p} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$

snadno nahlédnete, že $g \in \mathcal{L}_{(\frac{1}{2},+\infty)}$

3/ Jako cvičení ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $\frac{\cos x}{x^a}$ na intervalu $(\frac{1}{2}, +\infty)$ pro $a \in \langle p,q\rangle \subset (1,+\infty)$: