5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Záměna řady a integrálu)**.** Nechť $D \in \mathcal{S}$ a g_j, $j = 1, 2, \dots$ jsou měřitelné funkce na D. Předpokládejme, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

(a) $g_j = aq^j$, kde a, q jsou měřitelné funkce, $|q| < 1$, a $\int_D \frac{a}{1-q}\, d\mu$ konverguje (geometrická řada),

(b) $\sum_j \int_D |g_j|\, d\mu < \infty$,

(c) $\int_D \sum_j |g_j|\, d\mu < \infty$,

(d) $g_j = (-1)^j h_j$, $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots \geq 0$, $h_j \to 0$, h_1 je integrovatelná (alternující řada).

Potom řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude a platí vzorec

$$\int_D \sum_j g_j\, d\mu = \sum_j \int_D g_j\, d\mu,$$

Věta 2 (Leviho pro řady)**.** Nechť $D \in S$ a g_j, $j = 1, 2, \dots$, jsou nezáporné měřitelné funkce na D. Potom

$$\int_D \sum_j g_j = \sum_j \int_D g_j$$

Věta 3 (Lebesgueova věta pro řady)**.** Nechť $D \in S$ a g_j, $j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na D. Nechť řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná majoranta) tak, že

$$\Big|\sum_{j=1}^{k} g_j(x)\Big| \leq g(x), \qquad k = 1, 2, \dots, \qquad x \in D.$$

Potom

$$\int_D \sum_j g_j\, d\mu = \sum_j \int_D g_j\, d\mu.$$

Známé řady

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in (-1,1]$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n \qquad x \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Příklady

1.
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$$

2.
$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$$

3.
$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$$

4.
$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$$

5.
$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

6.
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq}$$

$p, q > 0$

7.
$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}$$

8.
$$\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2$$

9.
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$$

10.
$$\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$$

11.
$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$|b| < a$