4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Levi)**.** Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in S$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ a $f = \lim_{j\to\infty} f_j$. Pak

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \mathrm{d}\mu$$

Věta 2 (Lebesgue)**.** Nechť f a $\{f_j\}$ jsou měřitelné funkce na $D \in S$, Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (majoranta) tak, že

$$|f_j(x)| \leq |g(x)| \qquad j \in \mathbb{N}, \quad x \in D.$$

Potom

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \mathrm{d}\mu.$$

Metody řešení příkladů:

1. Přímý výpočet
2. Odhad veličiny $\int (f_j(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$
3. Levi
4. Lebesgue

Příklady

1. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$

3. Použijete-li Lebesguea, volte majorantu až pro $n \geq 2$,
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,\mathrm{d}x \qquad 0 < A < \infty$$

5. Použijte odhad $\frac{\ln(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq (1+x)$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

6. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x \qquad a \in \mathbb{R}$$

7. Použijete-li Leviho, odhadujte zvlášť $(0,1)$ a $(1,\infty)$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$$

8. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

9. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{x}{n})^n\cdot\sqrt[n]{x}}$$

3/ při použití Lebesgueovy věty bývá výhodné položit

$g(x) = \sup_{n \in N} |f_n(x)|$ (kde N je množina přir. čísel)

pro každé $x \in M$. V tomto případě zvolíme $x \in M$ pevné a hledáme $\sup |f_n(x)|$ přes množinu všech přirozených čísel (anebo alespoň pro všechna $n \geqq n_0$, kde n_0 je pevné přirozené číslo). Jak postupovat v tomto případě ukážeme na příkladech.

POZOR ! - při vyšetřování stejnoměrné konvergence hledáme

$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$, kdežto při použití Lebesgueovy věty hledáme $\sup_{n \in N} |f_n(x)|$!

4,2.	Ukažte, že $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx = 0$!

1/ Pro každé $n \in N$ existuje integrál jako Riemannův i Newtonův, ukažte, že $\int_0^1 x^n n^{-1}\, dx = \frac{1}{n\,(n+1)}$, odkud plyne tvrzení.

2/ Využijte též odhadu $0 \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx \leqq \int_0^1 \frac{1}{n}\, dx \leqq \frac{1}{n}$.

3/ Použijte větu 20 :

a/ limitní funkce $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n} = 0$ pro každé $x \in (0,1)$,

b/ $\frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$ na intervalu $(0,1)$ (zřejmě $0 \leqq \frac{x^n}{n} \leqq \frac{1}{n}$)

tedy $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n}\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0$.

(Jako cvičení ukažte, že $\sigma_n = \frac{1}{n}$!).

4/ Použijte Leviho větu:

a/ $\frac{x^n}{n} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ pro každé $n \in N$ (proč ? ! ,

b/ $\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{x^n}{n}$ pro každé $x \in (0,1)$ a každé $n \in N$.

Dokažte poslední nerovnost přímo anebo použitím tvrzení, že pro libovolné $x \in (0,1)$ je funkce $\varphi(z) = \frac{x^z}{z}$ jakožto funkce z klesající v intervalu $(1, +\infty)$.

5/ Použijte Lebesgueovu větu:

Hledáme funkci g tak, aby $g \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a byla splněna nerovnost $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leqq g(x)$ pro všechna $n \in N$ a všechna $x \in (0,1)$, stačí zřejmě položit $g = 1$ na intervalu $(0,1)$.

Zkusme spočítat $\sup_{n \in N} \frac{x^n}{n}$ pro $x \in (0,1)$

(tím vlastně dostaneme nejlepší odhad), je vidět, že $\sup_{n \in N} \frac{x^n}{n} = x$ pro $x \in (0,1)$, stačí tedy položit v Lebesgueově větě $g(x) = x$ na $(0,1)$. ||

4,3. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = 0$!

1/ Ukažte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu $0 \leqq \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = \int_0^{1/n} \frac{nx\, dx}{1+n^2x^2} + \int_{1/n}^1 \frac{nx\, dx}{1+n^2x^2} \leqq$

$$\leqq \int_0^{1/n} nx\, dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{nx}\, dx = \frac{1}{2n} + \frac{\log n}{n}$$

3/ Zkoumejte, zda $\frac{nx}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ v $(0,1)$

(nekonvergují stejnoměrně, neboť

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \max\left\{ 0 ; \frac{n}{1+n^2} ; \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \Big)$$

4/ Použijte Lebesgueovu větu.

Z předchozího odstavce vyplývá, že

$$x \in (0,1) , \quad n \in N \Rightarrow 0 \leqq \frac{nx}{1+n^2x^2} \leqq \frac{1}{2}$$

stačí tedy položit $g = \frac{1}{2}$ na intervalu $(0,1)$ a ověřit podrobně předpoklady Lebesgueovy věty,

dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = 0 .$$

Jako cvičení se pokusme nalézt "lepší" odhad, položme

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{pro každé } x \in (0,1).$$

Zvolme tedy pevně $x \in (0,1)$, místo abychom počítali

$\sup\limits_{n\in N} \frac{nx}{1+n^2x^2}$, položme pro každé $n \in \langle 1,+\infty)$ (a každé $x \in (0,1)$

$$H_x(n) = \frac{nx}{1+n^2x^2} .$$

Zde tedy považujeme n za "spojitě" proměnnou a hledejme

$$G(x) = \sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

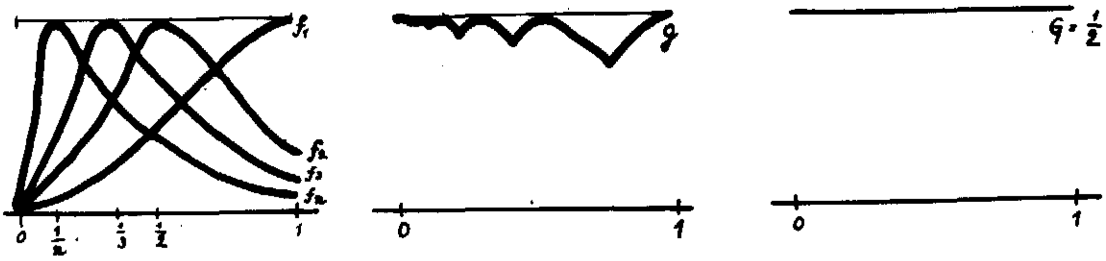
Odůvodněte, proč $g(x) \leqq G(x)$ pro každé $x \in (0,1)$!

Opět zjistěte, že

$$\sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \max\left\{ \frac{x}{1+x^2} ; 0 ; \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} .$$

Žádný "lepší" odhad jsme tedy neobdrželi. Uvědomte si, že funkce G není "nejlepším" odhadem, je to způsobeno tím, že místo abychom vyšetřovali supremum přes množinu všech přirozených čísel N , vyšetřovali jsme vlastně supremum přes množinu všech reálných čísel v intervalu $\langle 1, +\infty)$ (podrobně rozmyslete !). Kdyby tedy vyšlo $\int_0^1 G = +\infty$, stále by mohlo být $\int_0^1 g < +\infty$.

Viz následující obrázek:



Obrázek č.4

5/ Ukažte, že nelze přímo použít Leviho větu .

4,4.	Dokažte, že	$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}\,.\,x}{1+n^2x^2}\,dx = 0$!

1/ Ověřte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu

$$0 \leqq n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{x}{1+n^2x^2}\,dx \leqq n^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{1/n} x\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{n^2x}\,dx \right) =$$

$$= n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{\log n}{n} \right) .$$

3/ Ukažte, že posloupnost $\frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2}$ nekonverguje stejnoměrně k nule v intervalu (0,1) jest

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2} = \max\left\{ 0 ; \frac{\sqrt{n^3}}{1+n^2} ; \frac{\sqrt{n}}{2} \right\} .$$

4/ Ukažte, že jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty, jest

$$\sup_{n\in N} \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2} \leqq \sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2} = \max\left\{ \frac{x}{1+x^2} ; 0; \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\sqrt{x}} \right\} =$$

$$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4.\sqrt{x}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$$

4,5.	Ukažte, že	$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 0$

‖ 1/ Ukažte, že $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \longrightarrow 0$ pro $n \longrightarrow +\infty$ na intervalu $(0,1)$, ale nekonvergují tam stejnoměrně.

Poslední tvrzení dokažte

a/ tím, že ukážete $\sigma_n = \frac{1}{2}$,

b/ podrobně z následujících vztahů:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 1-}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) \quad !$$

2/ Použijte Lebesgueovu větu:

"rychlý", ale "hrubý" odhad dává $0 \leqq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leqq \underline{1}$ v $(0,1)$

anebo "lepší" odhad $0 \leqq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leqq \dfrac{x}{1+x^2}$ pro $x \in (0,1)$, $n \in N$.

3/ Použijte Leviho větu . ‖

4,6.	Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 0$!

‖ 1/ Využijte odhadu

$$0 \leqq \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx + \int_1^\infty x^{-n}\,dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n \geqq 2 .$$

2/ Limitní funkce f : $f(1) = \frac{1}{2}$; $f = 0$ jinde v $(0, +\infty)$.

3/ Ukažte, že posloupnost $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ nekonverguje k f stejnoměrně v intervalu $(0, +\infty)$

(využijte výsledku z př. 4,5 anebo nespojitosti funkce f !)

Kdyby nicméně bylo $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \rightrightarrows f$ v $(0, +\infty)$, nemohli bychom stejně použít větu 20 (proč?).

4/ Použijte Lebesgueovu větu, vyjde

$$g(x) = \sup_{n\in N}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x}{1+x^2}\text{ , tedy } g \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

(je okamžitě vidět, že $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1 = +\infty$), omezme se proto na $n \geqq 2$, potom $\displaystyle\sup_{n\geqq 2}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Vše si podrobně rozmyslete a proveďte !

5/ Použijte Leviho větu! ‖

4,7.	Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} = \underline{1}$!

‖1/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \underline{1}$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N\ ;\ x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\ ,$$

$$n \geqq 2\ ,\ x \in (1,+\infty) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leqq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot (\tfrac{x}{n})^j\right]^{-1} \leqq \left[\tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)\,\frac{x^2}{n^2}\right]^{-1} \leqq \frac{4}{x^2}\ .$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu . ‖

4,8. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos x\, dx = 0$!

‖1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0, +\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N\ ,\ x \in (0,+\infty) \Rightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1 + x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ ‖.

4,9. Buď $0 < A < +\infty$, potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\, dx = 0$.

‖Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A)\ ,\ n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)}\ .$$ ‖

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{na} \quad M \Rightarrow \int_M f_n \longrightarrow \int_M f$$

Uveďme příklady

4,10. Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1\rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$.

Potom a/ $f_n \longrightarrow 0$ v $\langle 0,1\rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1\rangle$?