3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1 (Konstrukce integrálu)**.** Nechť $D, D' \in S$ a $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Integrál $\int_D f d\mu$ vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme $D = D'$.

1. Je-li f **nezáporná** měřitelná funkce, definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \sup\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D\ , 0 \le \alpha_j \le f \text{ na } A_j, j = 1 \dots m\}.$$

Součty vyskytující se v předchozím vzorci nazýváme dolními součty k funkci f . Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován vždy, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D, definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \int_D f^+ \mathrm{d}\mu + \int_D f^- \mathrm{d}\mu$$

pokud rozdíl v výše má smysl. Pokud

$$\int_D f^+ = \int_D f^- = \infty$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná (přesně: S-měřitelná) funkce na $D' \neq D$ a $\mu(D\ D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \int_{D \cap D'} f \mathrm{d}\mu$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D. V některých případech je účelné používat podrobnější zápis Je-li integrál $\int_D f \mathrm{d}\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál.* Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f \mathrm{d}\mu$ *konverguje* nebo že *f je integrovatelná.*

Věta 2 (Diskuse vztahu mezi Newtonem a Lebesguem)**.** Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b).

1. Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b, konverguje i Newtonův a to absolutně.

2. Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, konverguje i Lebesgueův.

3. Pokud konverguje jak Newtonův tak Lebesgueův, pak mají oba stejnou hodnotu.

4. Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.

Příklady

1. Určete λ míru množiny

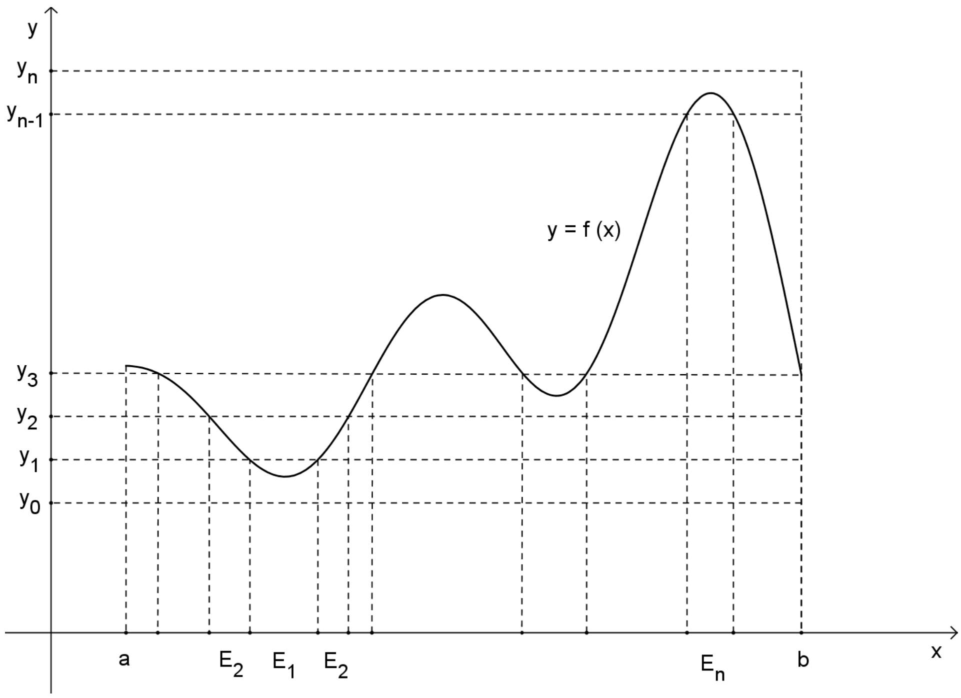
   (a) $[0,1]$
   (b) $(0,1)$
   (c) $[2,6)$
   (d) $[0,\infty)$
   (e) přímky v $\mathbb{R}^2$
   (f) elipsa v $\mathbb{R}^2$
   (g) paraboloid v $\mathbb{R}^3$
   (h) $\{1\}$
   (i) $\mathbb{Q}$
   (j) $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ v $\mathbb{R}^2$
   (k) Cantorovo diskontinuum

2. Najděte příklad množiny A tak, aby $\lambda(A)>0$, $\operatorname{int} A=\emptyset$

3. Vyšetřete **Lebesgueovy** integrály:

   (a) $\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x$
   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x$
   (c) $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
   (d) $\int_{-10}^{10}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$
   (e) Dirichletovy funkce přes interval $[0,1]$
   (f) Charakteristické funkce Cantorova diskontinua

Existuje-li konečný Lebesgueův integrál funkce $f(x)$ v E, pak o funkci $f(x)$ říkáme, že je integrovatelná v Lebesgueově smyslu. Množinu všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí přes $E = \langle a, b\rangle$ značíme $\mathcal{L}(E)$ nebo $\mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$.



Obrázek 4: K definici Lebesgueova integrálu.

Věta 4.27. Má-li $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál, pak zde má i Lebesgueův integrál a oba integrály jsou si rovny, tj.

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dx = (\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Obrácená věta neplatí. Funkce, která má Lebesgueův integrál, nemusí mít Riemannův integrál. $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ (viz následující příklad).

Příklad 4.28. Vypočítejme $(\mathcal{L}) \int_0^1 f_D(x)\, dx$, kde $f_D(x)$ je Dirichletova funkce. Označme na $\langle 0, 1\rangle$ množinu všech racionálních čísel $E_{\mathbb{Q}}$ a množinu všech iracionálních čísel $E_{\mathbb{I}}$. Poznamenejme, že množina $E_{\mathbb{Q}}$ je spočetná množina (existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinou $E_{\mathbb{Q}}$ a množinou přirozených čísel $\mathbb{N}$), její míra je proto nula, $\mu E_{\mathbb{Q}} = 0$, míra množiny $E_{\mathbb{I}}$ je rovna jedné, neboť $\mu E_{\mathbb{I}} = \mu(\langle 0, 1\rangle - E_{\mathbb{Q}}) =$

$\mu\langle 0,1\rangle - \mu E_{\mathbb{Q}} = 1 - 0 = 1$. Zvolme libovolné dělení d intervalu $\langle 0,1\rangle$. Zjemňujeme-li toto dělení, dospějeme k $\inf\limits_{d(\langle 0,1\rangle)} S_L(d) = \sup\limits_{d(\langle 0,1\rangle)} s_L(d) = 1\cdot\mu E_{\mathbb{Q}} + 0\cdot\mu E_{\mathbb{I}} = 0$, Lebesgueův integrál existuje a je roven nule. Jak již bylo ukázáno, Riemannův integrál Dirichletovy funkce neexistuje.

Před dalšími příklady je zavedeme pojem charakteristická funkce:

Definice 4.29. Nechť $M \subset E = \langle a,b\rangle$. Pak funkce $\chi_M : E \to \{0,1\}$, pro kterou platí $\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in M \\ 0 & \text{pokud } x \notin M \end{cases}$, se nazývá charakteristická funkce množiny M v množině E.

V následujících dvou příkladech budou ukázána zajímavá diskontinua.

Příklad 4.30. Zjistěme Lebesgueův integrál charakteristické funkce Cantorova diskontinua.

Cantorovo diskontinuum je množina, která vznikne, když z uzavřeného intervalu odstraníme spočetně mnoho otevřených intervalů. Uvažujme následující nekonečný proces. Z intervalu $C_1 = \langle 0,1\rangle$ vyjmeme otevřený interval $E_1 = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ (první krok), zůstanou dva uzavřené intervaly $\langle 0,\frac{1}{3}\rangle$, $\langle\frac{2}{3},1\rangle$, jejich sjednocení označme C_2. Z C_2 vyjmeme intervaly $E_{21} = (\frac{1}{9},\frac{2}{9})$, $E_{22} = (\frac{7}{9},\frac{8}{9})$ (druhý krok), zbylou uzavřenou množinu označme C_3.

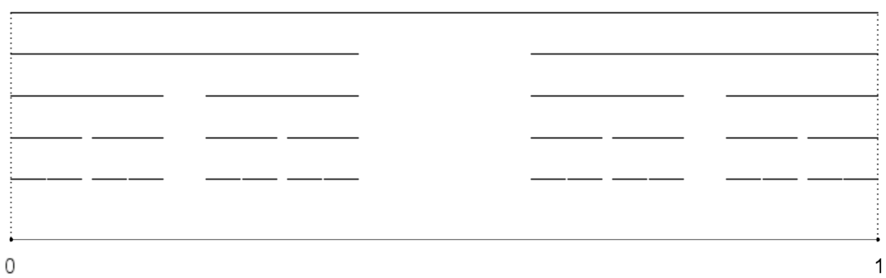
Obrázek 5: Konstrukce Cantorova diskontinua.

Dále postupujeme stejným způsobem, ze středu uzavřených intervalů vyjímáme otevřené intervaly, jejichž délka je rovna třetině původního intervalu, tedy ve třetím kroku vyjmeme z C_3 interval $E_{3j}, (1 \le j \le 4)$, až v k-tém kroku z C_k vyjmeme 2^{k-1}

intervalů, které tvoří množinu $E_k = \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} E_{kj}$. Sjednocení spočetně mnoha otevřených množin (intervalů) je otevřená množina $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Cantorovo diskontinuum se nazývá komplement $P = \langle 0,1\rangle \setminus E$ množiny E do $\langle 0,1\rangle$ a je to uzavřená množina. Lebesgueova míra množiny E_k je $\mu E_k = \frac{2^{k-1}}{3^k}$, Lebesgueova míra množiny E je $\mu E = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$ a míra Cantorova diskontinua P je $\mu P = 1 - \mu E = 0$ (zde nastává paradox, protože P je množina nespočetná (má dokonce mohutnost kontinua), avšak $\mu P = 0$). Nyní charakteristickou funkci Cantorova diskontinua označme $\chi_P(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in E \\ 1 & \text{pokud } x \in P \end{cases}$. Lebesgueův integrál charakteristické funkce Cantorova diskontinua je $(\mathcal{L})\int_0^1 \chi_P(x)\,dx = 0$. Lze dokázat, že množina P je množina bodů nespojitosti funkce χ_P. Množina P je míry nula a platí $\chi_P \in \mathcal{R}(\langle 0,1\rangle)$, $(\mathcal{R})\int_0^1 \chi_P(x)\,dx = 0$ (dle [2, věta 161, str. 447]).

Příklad 4.31. Zjistěme Lebesgueův integrál charakteristické funkce ε-diskontinua.

ε-diskontinuum je množina (označme ji $K(\varepsilon)$), která vznikne podobným nekonečným procesem jako Cantorovo diskontinuum.



Obrázek 6: Konstrukce ε-diskontinua.

Nechť je dán uzavřený interval $I_1 = \langle 0,1\rangle$. Zvolme $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4}\rangle$ libovolně pevně. Ze středu uzavřeného intervalu $I_1 = \langle 0,1\rangle$ vyjmeme množinu (otevřený interval) K_1, jejíž míra je ε (1. krok), zůstanou dva uzavřené intervaly $\langle 0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\rangle$, $\langle \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, 1\rangle$, jejich sjednocení označme I_2. Z intervalu I_2 vyjmeme množinu $K_2 = K_{21} \cup K_{22}$, jejichž míra je $\mu K_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ (2. krok), zůstanou 4 uzavřené intervaly (jejich sjednocení označme I_3), míra každého je $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8}$. Ve třetím kroku z I_3 vyjmeme množinu $K_3 =$

pro která $\nu(D_1) < \delta$, $\nu(D_2) < \delta$ platí

$$|\sigma(D_1) - \sigma(D_2)| < \varepsilon\,.$$

Věta 3.15. Obě uvedené definice Riemannova integrálu jsou ekvivalentní.

Definovat Riemannův určitý integrál je trochu obtížnější než zavést Newtonův určitý integrál, protože před vyslovením samotné definice Riemannova integrálu je nutné zavést pojmy jako dělení intervalu, norma dělení, apod. Riemannova definice je cenná pro svou názornou geometrickou interpretaci, je základem některých numerických metod pro výpočet určitých integrálů. V praktických výpočtech je ale těžko použitelná. U Newtonova určitého integrálu založeného na existenci primitivní funkce názorná geometrická interpretace chybí, Newtonův integrál využíváme při praktickém výpočtu určitých integrálů . Bez znalosti primitivní funkce je výpočet určitého integrálu nutno počítat numericky.

3.3 Příklady

Začněme příkladem, který ukazuje, že ne každá funkce, která je omezená na $\langle a, b\rangle$, musí mít Riemannův integrál.

Příklad 3.16. Vypočítejme $(\mathcal{R}) \int\limits_0^1 f_D(x)\,dx$, kde $f_D(x)$ je Dirichletova funkce definovaná předpisem $f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Tato funkce je omezená a je nespojitá v každém bodě svého definičního oboru. V každém racionálním bodě nabývá svého maxima a v každém iracionálním bodě svého minima (funkce je nenakreslitelná).

Nechť $D = \{0 = x_0 \leq \tau_1 \leq x_1 \leq ... \leq x_{n-1} \leq \tau_n \leq x_n = 1\}$ je libovolné dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Zvolme body $\tau_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, ..., n$ tak, aby byly iracionální (to lze vždy). Pak bude $\sigma(D, \tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i = 0$. Zvolíme-li body τ_i tak, aby byly racionální, bude $\sigma(D, \tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i = 1$. Takto lze postupovat pro jakékoliv dělení nezávisle na tom, jaká je jeho norma. Přestože je funkce omezená, integrál nemůže existovat, není splněna Bolzanova-Cauchyova podmínka. Pro Dirichletovu funkci tedy platí $f_D \notin \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

7 Vztah mezi jednotlivými typy integrálů

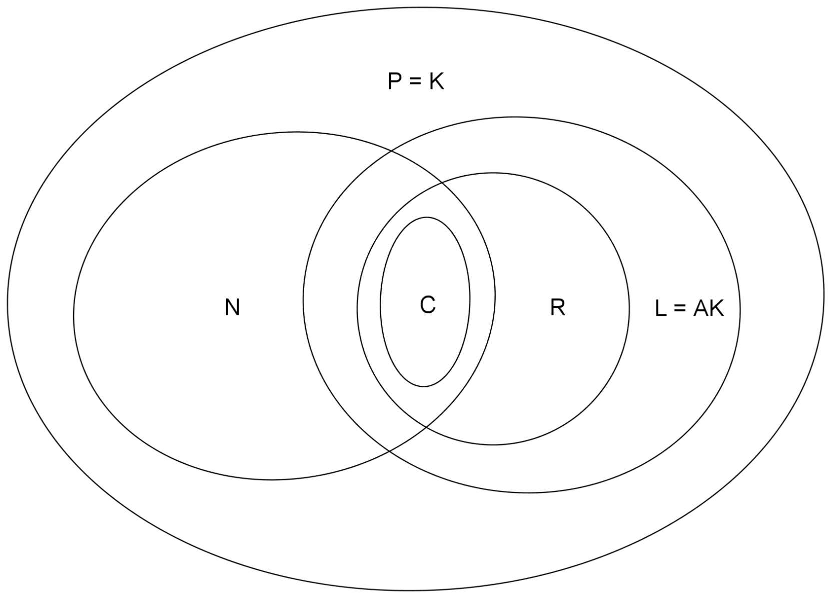
Omezme se v této kapitole na případ uzavřeného a omezeného intervalu $I = \langle a, b\rangle$, $I \subset \mathbb{R}$. Množiny integrovatelných funkcí ve smyslu Newtona, Riemanna, Lebesguea, Perrona a Kurzweila označme po řadě $\mathcal{N}(\langle a, b\rangle), \mathcal{R}(\langle a, b\rangle), \mathcal{L}(\langle a, b\rangle), \mathcal{P}(\langle a, b\rangle), \mathcal{K}(\langle a, b\rangle)$. Dále nechť $\mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$ značí množinu všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ a symbolem $\mathcal{AK}(\langle a, b\rangle)$ označme množinu funkcí $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, pro které $f \in \mathcal{K}(\langle a, b\rangle)$ a zároveň $|f| \in \mathcal{K}(\langle a, b\rangle)$ (jde tedy o množinu absolutně integrovatelných funkcí v Kurzweilově smyslu). V následujících pododstavcích dokážeme, že

$$\mathcal{C}(\langle a, b\rangle) \subsetneqq \mathcal{N}(\langle a, b\rangle) \subsetneqq \mathcal{K}(\langle a, b\rangle) = \mathcal{P}(\langle a, b\rangle)$$

a

$$\mathcal{C}(\langle a, b\rangle) \subsetneqq \mathcal{R}(\langle a, b\rangle) \subsetneqq \mathcal{L}(\langle a, b\rangle) = \mathcal{AK}(\langle a, b\rangle) \subsetneqq \mathcal{K}(\langle a, b\rangle) = \mathcal{P}(\langle a, b\rangle).$$

Uvedená rekapitulace je graficky znázorněna na obrázku. Ještě pro úplnost dodejme, že když pro funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ existují alespoň dva z uvedených integrálů, pak tyto integrály jsou si rovny.



Obrázek 10: Vztah mezi jednotlivými typy integrálů.

nově smyslu, tak i v Newtonově smyslu. Pokud platí, že jsou integrovatelné v obou, tak si jsou integrály rovny a platí následující věta.

Věta 3.8. *Buď $-\infty < a < b < \infty$, nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je funkce, pro kterou existuje Riemannův integrál $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a Newtonův integrál $(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (tj. $f \in R([a,b]) \bigcap N((a,b))$). Potom je*

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Nás však zajímají hlavně příklady funkcí, kdy jeden z integrálů neexistuje. První je uveden příklad funkce, která je newtonovsky integrovatelná, ale není riemannovsky integrovatelná.

Příklad 3.1. Funkce $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, která má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

má primitivní funkci tvaru $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(-1, 1)$. Z tohoto tvaru je patrné, že platí $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x) = \sin 1$, a proto existuje Newtonův integrál $(N)\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$, jenž je roven 0. Protože ale daná funkce $f(x)$ není omezená na $(-1, 1)$, tak nemá Riemannův integrál.

Jak jsme si již řekli, existují i funkce, které mají Riemannův integrál, ale nemají integrál Newtonův.

Příklad 3.2. Funkce

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

která je omezená na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, má Riemannův integrál, ale nemá Newtonův, protože nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Má-li existovat vlastní derivace $F'(0)$, musela by platit rovnost mezi limitou $\lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1$ a limitou $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$. Vzhledem k tomu, že se tyto limity nerovnají, nemůže existovat $F'(0)$, a tedy neexistuje ani primitivní funkce $F(x)$.

Další situace, která může nastat, je, že budeme mít danou funkci, která nebude riemannovsky integrovatelná a bude integrovatelná lebesgueovsky. Opačná situace nemůže nastat.

Příklad 3.3. Příkladem je Dirichletova funkce, jež je na množině $\mathbb{R}$ všude nespojitá. Lebesgueův integrál existuje a lze zintegrovat tak, že si množinu $\mathbb{R}$ rozdělíme na množinu $\mathbb{Q}$ a na množinu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Když integrujeme přes $\mathbb{Q}$, výsledkem je nula. Důvodem je, že $\mathbb{Q}$ je spočetná množina a má míru nula. V množině $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ je integrand nulový. Mohu říci, že Dirichletova funkce není riemannovsky integrovatelná, ale je lebesgueovsky integrovatelná.

Ukažme si také příklad funkce, která má Newtonův integrál a nemá integrál Lebesgueův.

Příklad 3.4. Funkce $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ splňuje tento požadavek. Daná funkce má Newtonův integrál, který je určen součtem alternující řady tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x,$$

kdy její k-tý člen konverguje k nule. Důvodem existence Newtonova integrálu je, že se nám členy se sudým a lichým indexem ruší zároveň a vznikne nám tedy konečná limita. Zatímco u Lebesgueova integrálu posčítáme nejdříve členy se sudými indexy a pak členy s lichými indexy a odečteme je od sebe, pokud to lze. Bohužel v tomto případě tomu tak není, protože $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ je neabsolutně konvergentní. Tuto třídu funkcí Lebesgueův integrál nezahrnuje. Newtonův integrál existuje jak pro absolutně konvergentní, tak pro neabsolutně konvergentní funkce.

Dále si v této podkapitole uvedeme příklad funkce, která má Lebesgueův integrál a nemá integrál Newtonův. Je to například funkce signum, kterou jsme si vysvětlovali v (3.2).
Jelikož daná funkce má Riemannův integrál, tak má zákonitě i Lebesgueův integrál, ale nemá integrál Newtonův.

Ukážeme si případ, kdy funkce nemá Lebesgueův, ale má integrál Newtonův.

Příklad 3.5. Funkce je definována na intervalu $(0,1\rangle$ a má tvar $F(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}$. Derivace funkce je $F'(x) = \frac{-2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2} + 2x\sin\frac{\pi}{x^2}$, a její hodnota v bodě 0 je $F'(0) = 0$. $F(x)$ není na intervalu $(0,1\rangle$ absolutně spojitá, a tedy $F'(x)$ nemá Lebesgueův integrál. Newtonův integrál existuje, protože k funkci $F'(x)$ existuje primitivní funkce. Tato funkce má samozřejmě také Kurzweilův a Perronův integrál.

V následujícím smyslu bychom mohli uvádět další typy funkcí, které jsou integrovatelné v jednom, ale nejsou integrovatelné v druhém smyslu. Kvůli jejich velkému množství jsou však vybrány pouze ty nejjednodušší.

na vhodné množinové systémy. Jeden z možných systémů – σ-algebra – je zaveden v následující definici.

Ještě než si definici σ-algebry uvedeme, je dobré si uvědomit, že zatímco podmínky **i.** a **ii.** mají základ v geometrii euklidovských prostorů, podmínka **iii.** na geometrii základní množiny nezávisí.

Teorie míry je v současné době základem pro teorii Lebesgueova[4] integrálu, axiomatickou teorii pravděpodobnosti a objevuje se v řadě oblastí aplikací matematické analýzy (např. dynamické systémy, globální analýza, diferenciální rovnice).
Funkce splňující podmínku podmínka **iii.** se objevují i mimo matematiku – ve fyzice se často pracuje s funkcí, která oblasti přiřadí její hmotnost.

Vzhledem k naznačené různorodosti použití teorie míry není vhodné se při jejím budování omezit na konkrétní případ míry. Vyjděme proto z toho, že je dána abstraktní množina X, kterou nebudeme nijak konkretizovat, poněvadž v různých aplikacích nabývá X zcela odlišných forem. Např. X může být reálná přímka $\mathbb{R}$, pouhý interval $[0, 1]$, množina čísel celých $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, přirozených $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, rovina $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, či jiná podstatně komplikovanější množina.

Definice 2.1 Nechť X je neprázdná množina. Systém $\mathscr{A}$ podmnožin množiny X se nazývá *σ-algebra* na X, má-li tyto vlastnosti:
(**SA1**) $X \in \mathscr{A}$,
(**SA2**) $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathscr{A}$,
(**SA3**) $A_n \in \mathscr{A}$, pro $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Platí-li namísto (**SA3**) pouze slabší vlastnost $A, B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$, nazývá se $\mathscr{A}$ *algebra*. Někdy nelze zaručit, že zkoumaný systém obsahuje základní množinu X. Potom je vhodné pracovat s *okruhem*, tj. systémem $\mathscr{A}$ splňujícím vlastnosti:
(**O1**) $A, B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathscr{A}$,
(**O2**) $A, B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$.
Okruh který je uzavřen vzhledem k spočetnému sjednocení se nazývá σ-okruh.

Příklad 2.1

1. Nechť $\mathscr{A} = 2^X$, pak $\mathscr{A}$ je σ-algebra.

2. Nechť $\mathscr{A} = \{\emptyset, X\}$, pak $\mathscr{A}$ je σ-algebra.

3. Nechť $X = \mathbb{N}$ a $\mathscr{A} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{1, 3, 5, \dots\}, \{2, 4, 6, \dots\}\}$, pak $\mathscr{A}$ je σ-algebra.

4. Nechť $X = [a, b) \subseteq \mathbb{R}$ je pevně zvolený interval. Potom systém všech konečných sjednocení jeho subintervalů $[\alpha, \beta) \subseteq [a, b)$ je algebra.

5. Nechť X je nespočetná množina a
$\mathscr{A} := \{A \in X : A$ je nejvýše spočetná, nebo $(X \setminus A)$ je nejvýše spočetná$)\}$,
pak $\mathscr{A}$ je σ-algebra.

[4] Henri Léon Lebesgue, narozen: 28. července 1875 Beauvais, Oise, Picardie, France, zemřel: 26. července 1941 Paris, France; teorie míry a integrace, teorie potenciálu, topologie.

Problém **2.2** Dokažte, že systém všech otevřených intervalů (a,b) na $\mathbb{R}$ není σ-algebra.

Problém **2.3** Proč nemusí obecně platit tvrzení:
Nechť $\mathscr{A}$ je systém všech otevřených podmnožin topologického prostoru X. Pak $\mathscr{A}$ není σ-algebra.

Lemma 2.1 *Buď $\mathscr{A}$ σ-algebra na množině X. Potom platí*
1) $\emptyset \in \mathscr{A}$,
2) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \Longrightarrow A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{A}$,
3) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \Longrightarrow A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{A}$,
4) $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots \in \mathscr{A} \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$,
5) $A, B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathscr{A}$.

Důkaz:
1) Podle (**SA1**) je $X \in \mathscr{A}$, podle (**SA2**) $\emptyset = X \setminus X \in \mathscr{A}$.
2) Poněvadž podle 1) $\emptyset \in \mathscr{A}$, též $A_1 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset \cup \ldots \in \mathscr{A}$.
4) Poněvadž pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $A_n \in \mathscr{A}$, je též (**SA2**) $X \setminus A_n \in \mathscr{A}$ a tedy i (**SA3**) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \setminus \big(X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) \in \mathscr{A}$.
3) Podle již dokázané vlastnosti 4) $A_1 \cap \ldots \cap A_n = A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap X \cap \ldots \cap X \cap \ldots \in \mathscr{A}$.
5) Platí $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$, podle (**SA2**) je $X \setminus B \in \mathscr{A}$, tedy užitím již dokázané vlastnosti 3) též $A \setminus B \in \mathscr{A}$. □

Poznámka **2.1**
Všimněme si, že jsou-li $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ dvě σ-algebry na X, též jejich průnik je σ-algebra na X, to platí obecněji.

Lemma 2.2 *Nechť $\mathscr{A}_\alpha$ je σ-algebra na X pro každé $\alpha \in I$. Pak též systém $\bigcap_{\alpha\in I} \mathscr{A}_\alpha$ je σ-algebra na X.*

Důkaz: Ověřme platnost axiomů (**SA1**), (**SA2**) a (**SA3**).
(**SA1**): Pro každé $\alpha \in I$ je $X \in \mathscr{A}_\alpha$, tudíž $X \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathscr{A}_\alpha$ a systém $\bigcap_{\alpha\in I} \mathscr{A}_\alpha$ je neprázdný.
(**SA2**): Je-li $A \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathscr{A}_\alpha$, potom pro každé $\alpha \in I$ je $A \in \mathscr{A}_\alpha$ tedy i $X \setminus A \in \mathscr{A}_\alpha$, odtud $X \setminus A \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathscr{A}_\alpha$.
(**SA3**): Je-li $A_n \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathscr{A}_\alpha$ pro $n \in \mathbb{N}$, je pro každé $\alpha \in I$ $A_n \in \mathscr{A}_\alpha$, tudíž pro každé $\alpha \in I$ též $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}_\alpha$ a tedy i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathscr{A}_\alpha$.
□
Nechť $\mathscr{S}$ je libovolný systém podmnožin množiny X. Uvažme systém všech σ-algeber na X, které obsahují $\mathscr{S}$; tento systém je neprázdný, poněvadž obsahuje např. σ-algebru 2^X. Z lemmatu 2.2 plyne, že průnik všech σ-algeber obsahujících $\mathscr{S}$ je také σ-algebra obsahující $\mathscr{S}$. Tato σ-algebra, kterou označíme jako $\mathscr{S}_\sigma$, se nazývá *σ-algebra generovaná systémem $\mathscr{S}$*. Zřejmě $\mathscr{S}_\sigma$ splňuje následující podmínky:
1) $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{S}_\sigma$,
2) je-li $\mathscr{A}$ libovolná σ-algebra na X taková, že $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$, potom $\mathscr{S}_\sigma \subseteq \mathscr{A}$.

Pozor, $\mathscr{S}_\sigma$ je definována nekonstruktivně. Je-li totiž $\mathcal{M}$ systém všech σ-algeber obsahujících $\mathscr{S}$, potom jsme $\mathscr{S}_\sigma$ zavedli jako

$$\mathscr{S}_\sigma = \bigcap_{\mathscr{A} \in \mathcal{M}} \mathscr{A}, \tag{2.1}$$

ovšem $\mathscr{S}_\sigma$ se vyskytuje na obou stranách vztahu (2.1) (proč), zejména tedy znaménko $=$ nelze nahradit znaménkem $:=$, na což je třeba dát pozor při řešení problémů.

Příklad 2.2
Nechť X je spočetná množina, pak systém $\mathscr{A} := \{A \in X : A$ je spočetná nebo $X \setminus A$ je spočetná$\}$ je σ-algebra generovaná systémem $\mathscr{S}$ všech konečných podmnožin X.

Problém **2.4** Nechť A je neprázdná podmnožina X. Ukažte, že $\mathscr{A} := \{X, \emptyset, A, X \setminus A\}$ je nejmenší σ-algebra obsahující A.

Definice 2.2 Nechť X je metrický prostor. σ-algebra $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}_X$) na X generovaná systémem všech otevřených podmnožin X se nazývá *Borelova algebra* a její prvky se nazývají *borelovskými množinami* prostoru X.

Borelova[5] algebra $\mathscr{B}$ obsahuje otevřené množiny, uzavřené množiny, spočetné průniky otevřených množin, spočetná sjednocení uzavřených množin, atd. Množinu, která je spočetným průnikem otevřených množin, nazýváme množinou typu G_δ, množinu, která je spočetným sjednocením uzavřených množin nazýváme množinou typu F_σ. Podobně[6] se dále zavádí množinové typy $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta}\dots$

Příklad 2.3
Je-li $\mathscr{S} := \{(a,b) : a < b\}$ systém všech otevřených intervalů na $\mathbb{R}$, potom $\mathscr{B}_\mathbb{R} = \mathscr{S}_\sigma$. Tedy Borelova algebra na $\mathbb{R}$ je generována systémem všech otevřených intervalů. Vskutku, každý otevřený interval je jako otevřená množina obsažen v $\mathscr{B}_\mathbb{R}$, tedy $\mathscr{S}_\sigma \subseteq \mathscr{B}_\mathbb{R}$. Naopak, každá otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ je nejvýše spočetným sjednocením otevřených intervalů, tedy $\mathscr{B}_\mathbb{R} \subseteq \mathscr{S}_\sigma$.

Problém **2.5** Dokažte, že Borelova algebra $\mathscr{B}$ na $\mathbb{R}$ je generovaná též všemi uzavřenými intervaly typu $[a,b]$.

Zatímco v prvním kroku jsme z množiny X vybrali vhodný systém podmnožin – σ-algebru, nyní na této σ-algebře sestrojíme množinovou funkci – *míru*, která bude abstrakcí našich představ o délce, ploše, objemu.... Bude tedy přirozené předpokládat její nezápornost, aditivitu a to, že bude prázdné množině přiřazovat 0. Pro opravdu dobrou teorii budeme potřebovat pouze nepatrně víc.

Před vlastní definicí si připomeňme, že *množinovou funkcí* na systému $\mathscr{S}$ podmnožin množiny X budeme rozumět zobrazení systému $\mathscr{S}$ do $\mathbb{R}^*$. Zejména tedy může množinová funkce nabývat i hodnot $-\infty$ a $+\infty$. V případě, že nevlastních

[5]Félix Édouard Justin Émile Borel, narozen: 7. ledna 1871 Saint Affrique, Aveyron, Midi-Pyrénées, France, zemřel: 3. února 1956 Paris, France; teorie funkcí reálné proměnné, teorie her.

[6]δ (z něm. *Durchschnitt*) odpovídá průniku, σ (z něm. *Summe*) odpovídá sjednocení.

hodnot $-\infty$ a $+\infty$ množinová funkce nenabývá, budeme ji nazývat *konečnou množinovou funkcí*.

Definice 2.3 Nechť X je neprázdná množina. *Mírou* na X rozumíme množinovou funkci μ definovanou na nějaké σ-algebře $\mathscr{A}$ na X, která má následující vlastnosti
(**M1**) $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow 0 \le \mu(A) \le +\infty$,
(**M2**) $\mu(\emptyset) = 0$,
(**M3**) $A_n \in \mathscr{A}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a A_n jsou po dvou disjunktní $\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\ge 1} \mu(A_n)$.
Číslo $\mu(A)$ nazýváme *mírou množiny* A. Množiny, které patří do σ-algebry $\mathscr{A}$ se nazývají *měřitelné*, přesněji *μ-měřitelné*. Uspořádaná dvojice $(X, \mathscr{A})$ se nazývá *měřitelný prostor*.

Poznámka **2.2**

1. Vlastnost (**M3**) se nazývá *spočetná aditivita*, nebo *σ-aditivita* míry μ.

2. Prvky měřitelného prostoru jsou měřitelné množiny.

Poznámka **2.3**
Je zřejmé, že míru lze definovat i na algebře nebo okruhu $\mathscr{A}$. Ovšem vlastnost (**M3**) má smysl pouze tehdy, když $\bigcup_{n\ge 1} A_n \in \mathscr{A}$.

Příklad 2.4
Uveďme si několik příkladů míry:

1. *Triviální míra*: pro libovolnou neprázdnou množinu X a její libovolnou σ-algebru položme $\mu(A) \equiv 0$.

2. $$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{pro } A = \emptyset, \\ +\infty & \text{pro } A \subseteq X, A \ne \emptyset. \end{cases}$$

3. *Diracova*[7] *míra* : pro libovolnou neprázdnou množinu X a pevně zvolený prvek $x \in X$ položme
$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

4. *Aritmetická míra*, též *počítací míra*: pro libovolnou neprázdnou množinu X a její libovolnou σ-algebru položme $\mu(A) := \#A$
$$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card} A, & \text{je-li počet členů } A \text{ konečný}, \\ +\infty, & \text{je-li } A \text{ nekonečná}. \end{cases}$$

5. *Lebesgueova míra* na $\mathbb{R}$: pro $X = \mathbb{R}$ uvažme Borelovu algebru $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Lze ukázat, (viz. str. 27), že existuje jediná míra λ definovaná na $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ tak, že pro každý otevřený interval (a, b) je jeho míra rovna jeho délce $\lambda((a, b)) = b - a$.

[7]Paul Adrien Maurice Dirac, narozen: 8. srpna 1902 Bristol, Gloucestershire, England, zemřel: 20. října 1984 in Tallahassee, Florida, USA; matematik, fyzik.

tvrzení, že $\frac{1}{1+x^2} \in \mathscr{L}_{(1,+\infty)}$.

4/ Jiný způsob důkazu:

jelikož jsme zjistili, že $(L)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ existuje

/ $\frac{1}{1+x^2} \in \mathscr{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ / a jelikož

$(N)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2}$, musí mezi oběma

integrály nastat rovnost /př. 3,15/ , tedy i $(L)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$

je konečný, tj. $\frac{1}{1+x^2} \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$.

5/ Použijte též cvič. 3,13 .

Pochopitelně, že jsme mohli postupovat i jinak, např. využít odhadu $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ pro chování integrálu v intervalu $(0,1)$; zkuste následující tvrzení dokazovat z hlediska dobrého procvičení látky - vždy všemi možnými způsoby.

3,29. Buď $\alpha \in E_1$, potom $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

Použijte větu 26 a 53 .

3,30. Ukažte, že $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$!

1/ Ukažte, že $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \in \mathscr{L}^{R}_{(0,+\infty)}$,

2/ $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \in \mathscr{L}_{(0,1)}$

3/ dále ukažte, že $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$,

a/ poslední tvrzení dokážeme třeba následovně:

tvrdíme, že existuje takové $x_0 > 0$, že $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ pro $x > x_0$.

Jak dokážeme tuto poslední nerovnost? Zřejmě je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} \qquad \text{pro } x > x_0 .$$

Protože ale $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1$, existuje např. k číslu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ takové x_0 /podle definice limity/ , že

$x > x_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} \leq 1 + \frac{1}{2}$, což jsme vlastně chtěli ukázat.

Jelikož nyní $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2x}\, dx = +\infty$, je $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\, dx = +\infty$.

Jak je to s integrálem $\int_1^{x_0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$, je-li $x_0 > 1$?

b/ použijete-li cvičení 3,27 /což vlastně není nic jiného, než rychle provedená část a/ /, je vzhledem k

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \cdot x = 1 \; , \quad \alpha = 1$$

dokázáno, že $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$. ‖

Celý postup si dobře rozmyslete a jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!

3,31. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$ konverguje !

‖ Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův ! ‖

Při vyšetřování konvergence integrálů, je třeba velmi dobře znát chování jednotlivých funkcí - zvláště v okolí "nepříjemných" bodů. Zopakujte si proto, jak vypadají například následující limity:

$$\lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \log^k x \; , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} \; , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log x} \; , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \; ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \; , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \; , \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \; , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \; , \; \ldots$$

3,32. Dokažte, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$!

1/ Funkce e^{-x^2} je spojitá a kladná v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $e^{-x^2} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$.

2/ Zřejmě $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,9)}$ /proč?/; protože $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$, je podle cvičení 3,25 i $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(9,+\infty)}$. Tudíž $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Lze také postupovat takto /což není nic jiného, než důkaz vět ze cvičení 3,25 /:

existuje takové x_0 , že $0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$ pro $x > x_0$.

Proč?

Naše nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \le e^{-x^2} \cdot x^2 \le 1 \qquad \text{pro } x > x_0 \; ,$$

která vyplývá ze vztahu $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$ a z definice limity.

Protože $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ je konečný pro $x_0 > 0$, je konečný i integrál $\int_{x_0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. Lehko ukážeme, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,x_0)}$.

1/ Funkce $\sin x$ je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $\sin x \in \Lambda_{(0,+\infty)}$. Odtud plyne, že $(\sin x)^+ \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$, $(\sin x)^- \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$ /věta 35/ a podle věty 27 je

$$\int_0^{\infty} (\sin x)^+ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi n}^{(2n+1)\pi} \sin x \, dx = +\infty ,$$

obdobně $\int_0^{\infty} (\sin x)^- \, dx = +\infty$, tedy $\sin x \notin \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$ /věta 35/.

2/ Kdyby $\sin x \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$, musel by mít podle věty 27 smysl součet $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x \, dx$, což však není splněno.

3/ Kdyby $\sin x \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$, musela by podle cvičení 3,13 existovat limita $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, kde F je libovolná primitivní funkce k funkci $\sin x$ na $(0,+\infty)$. Ale např. $F(x) = -\cos x$ a uvedená limita zřejmě neexistuje.

4/ Definujme si funkci g na E_1 takto:

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \in (0,+\infty) , \\ 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle . \end{cases}$$

Ukažte podle definice, obdobně jako v př. 2,30, že

$$\tilde{A}g = +\infty , \qquad \underset{\sim}{A}g = -\infty ,$$

tedy i $\tilde{\int_0^{\infty}} \sin x \, dx = +\infty$, $\underset{\sim}{\int_0^{\infty}} \sin x \, dx = -\infty$ /viz definici za větou 12/.

Odtud je vidět, že nemůže být $\sin x \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$.

3,46. Dokažte, že neexistuje $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$!

1/ Ukažte opět, že $x \in \Lambda$ a dále, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x)^+ dx = \int_0^{\infty} x \, dx = +\infty ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x)^- dx = \int_{-\infty}^{0} (-x) \, dx = +\infty .$$

2/ Kdyby bylo $x \in \mathcal{L}^*_{(-\infty,+\infty)}$, musel by mít smysl součet

$$\int_{-\infty}^{0} x \, dx + \int_0^{\infty} x \, dx .$$

3/ Použijte též cvičení 3,13 - kdyby bylo $x \in \mathcal{L}^*_{(-\infty,+\infty)}$, musilo by být $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} - \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2}$,

ale rozdíl posledních limit nemá smysl.

4/ Použijte též př. 2,30.